

|                   |                                              |
|-------------------|----------------------------------------------|
| <b>Del B</b>      | Uppgift 1-10. Endast svar krävs.             |
| <b>Del C</b>      | Uppgift 11-16. Fullständiga lösningar krävs. |
| <b>Provtid</b>    | 120 minuter för Del B och Del C tillsammans. |
| <b>Hjälpmedel</b> | Formelblad och linjal.                       |

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå

B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

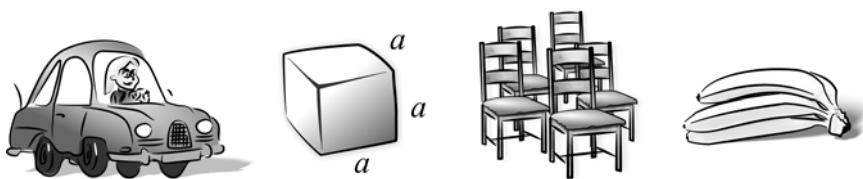
Födelsedatum: \_\_\_\_\_

Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_

**Del B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs. Skriv dina svar direkt i provhäftet.*

1. Vilken är den fjärde termen i den geometriska summan  $2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots$ ? \_\_\_\_\_ (1/0/0)
2. För vilket värde på  $x$  är uttrycket  $\frac{3x-21}{6-x}$  inte definierat? \_\_\_\_\_ (1/0/0)
3. Vilket av alternativen A-E visar ett polynom?
- A.  $\frac{4}{x^3} + 4x^3$
- B.  $x^2 + x^{2,5}$
- C.  $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^3$
- D.  $4x^3 + 2x^2$
- E.  $\frac{5x}{12x - x^2}$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
4. Hur många reella lösningar har ekvationen nedan?  
 $(x-1)(x^2-4) = 0$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
5. Derivera
- a)  $f(x) = 3x^4 + 6x + 10$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)
- b)  $f(x) = e^x + ex$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)
- c)  $f(x) = \frac{2}{3x} + \frac{3x}{2}$  \_\_\_\_\_ (0/1/0)

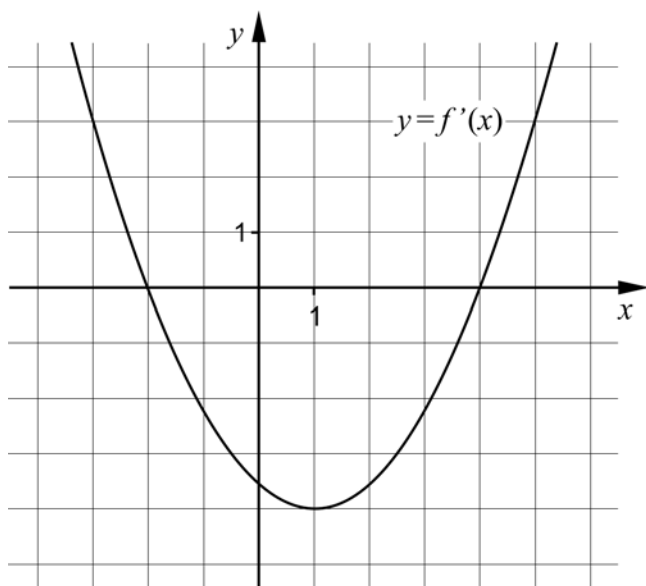
6. Nedan ges några olika situationer som kan beskrivas med en funktion. Vilket av alternativen A-D beskrivs bäst med en diskret funktion?



- A. Bensinförbrukningen hos en bil beror av hur långt bilen körs.
- B. Volymen av en kub beror av sidans längd.
- C. Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.
- D. Kostnaden för bananer beror av vikten på bananerna.

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

7. Figuren nedan visar grafen till derivatan  $f'$  för en tredjegradsfunktion  $f$ .



- a) För vilket värde på  $x$  har grafen till  $f$  en minimipunkt?

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

- b) För vilka värden på  $x$  är  $f$  avtagande?

\_\_\_\_\_ (0/2/0)

8. Ange *alla* funktioner som har egenskapen att  $f(x) = f'(x)$  där  $f(x) \neq 0$

\_\_\_\_\_ (0/1/1)

## 9. Bestäm

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 7)$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

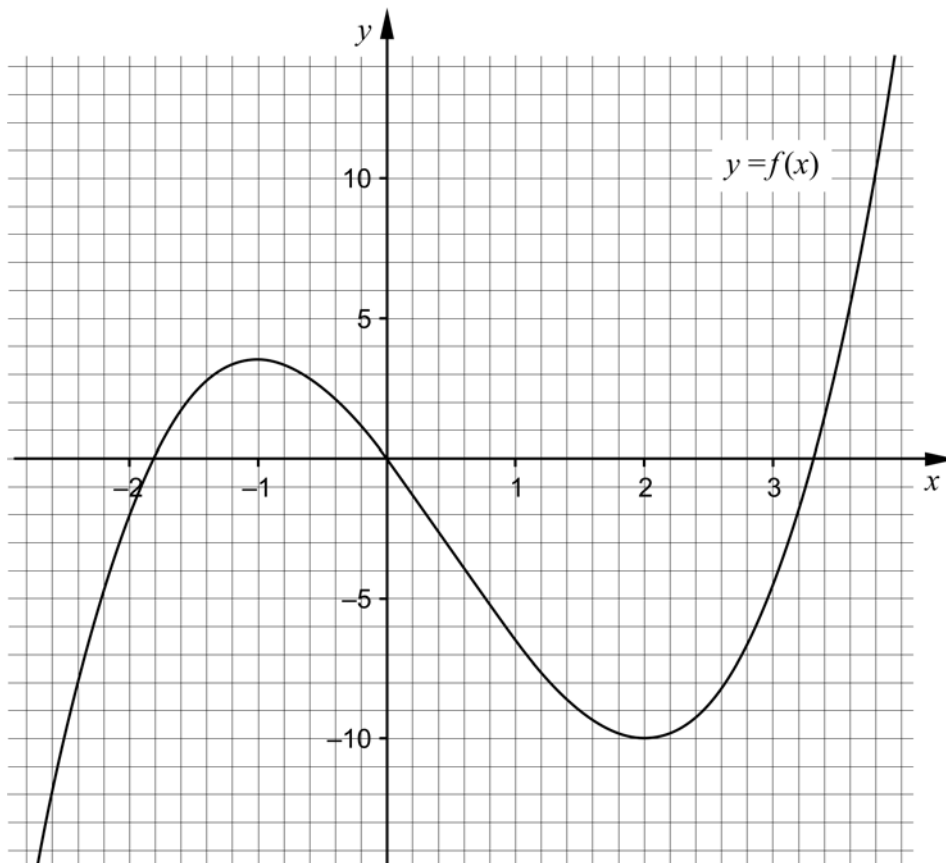
b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16x}{4x+9}}$  \_\_\_\_\_ (0/0/1)

10. I figuren visas grafen till tredjegradsfunktionen  $f$ . Använd grafen för att besvara följande frågor.

a) Lös ekvationen  $f(x) + 6,5 = 0$  \_\_\_\_\_ (0/0/1)

b) För funktionen  $g$  gäller att  $g(x) = f(x) + k$  där  $k$  är en positiv konstant. För vilka värden på  $k$  har ekvationen  $g(x) = 0$  endast en reell lösning?

\_\_\_\_\_ (0/0/1)



**Del C:** Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Beräkna  $\int_1^2 6x^2 dx$  algebraiskt. (2/0/0)

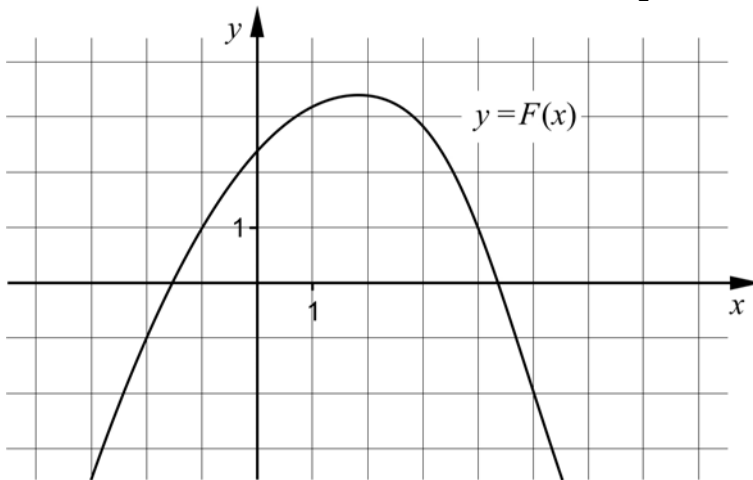
12. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x^3 - 3x^2$   
 Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella  
 maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.  
 Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en  
 maximi-, minimi- eller terrasspunkt. (3/0/0)

13. För funktionerna  $f$  och  $g$  gäller att  $f(x) = 5x^2 + 3x$  och  $g(x) = x^2 + 8x$   
 a) Bestäm det värde på  $x$  där grafen till  $f$  har lutningen 18 (2/0/0)  
 b) Grafen till  $g$  har en tangent i den punkt där  $x = 6$   
 Bestäm koordinaterna för tangentens skärningspunkt med  $x$ -axeln. (0/3/0)

14. Förenkla så långt som möjligt.  
 a)  $\frac{(x-3)(x+2)}{2x-6}$  (1/0/0)  
 b)  $\frac{x^2 + 8x + 16}{2x^2 - 32}$  (0/2/0)

15.  $F$  är en primitiv funktion till funktionen  $f$ .

I figuren visas grafen till funktionen  $F$ . Bestäm  $\int_{-2}^5 f(x) dx$  (0/0/1)



16. Bestäm derivatan till  $f(x) = \frac{A}{x}$  med hjälp av derivatans definition. (0/2/2)

|                   |                                              |
|-------------------|----------------------------------------------|
| <b>Del D</b>      | Uppgift 17-25. Fullständiga lösningar krävs. |
| <b>Provtid</b>    | 120 minuter.                                 |
| <b>Hjälpmedel</b> | Digitala verktyg, formelblad och linjal.     |

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 72 poäng varav 26 E-, 25 C- och 21 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 29 poäng varav 9 poäng på minst C-nivå

C: 38 poäng varav 16 poäng på minst C-nivå

B: 48 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 57 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

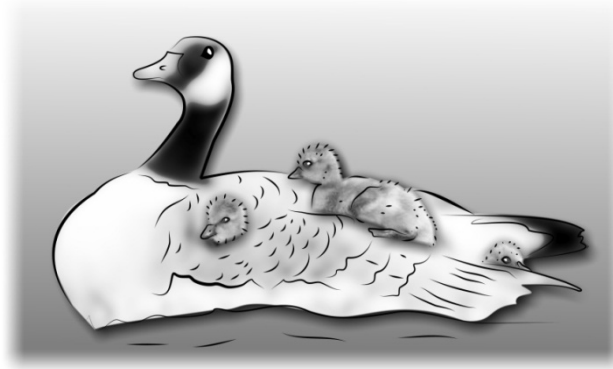
Födelsedatum: \_\_\_\_\_

Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_

**Del D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

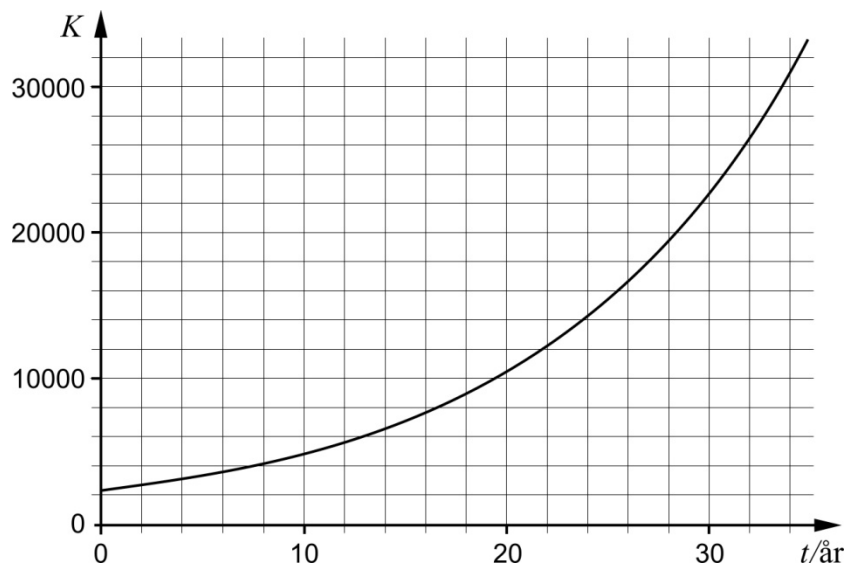
17. Bestäm det värde på  $x$  där derivatan till  $f(x) = x^2 + 5x$  är lika med derivatan till  $g(x) = -5x^2 + 14x$  (2/0/0)

18.



Kanadagåsen infördes till Sverige på 1930-talet. Därefter har populationen ökat. Vid samma tidpunkt varje år görs en inventering av antalet kanadagäss. Populationens tillväxt kan beskrivas med en exponentiell modell.

Diagrammet nedan visar antalet kanadagäss  $K$  som funktion av tiden  $t$  år, där  $t = 0$  motsvarar år 1977.



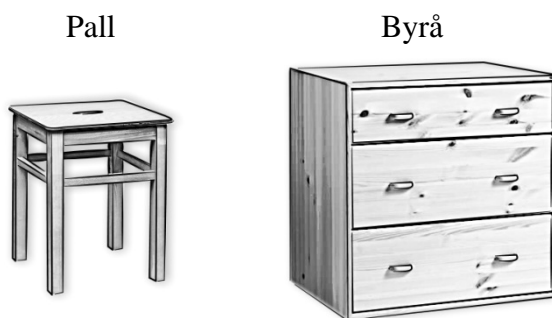
- a) Bestäm ett närmevärde till  $K'(30)$  med hjälp av grafen. (1/0/0)
- b) Ge en tolkning av vad  $K'(20) = 800$  betyder för antalet kanadagäss i detta sammanhang. (0/1/0)



19. Marcel tänker sätta in 2000 kr på ett sparkonto i slutet av varje år. Han tänker göra sin första insättning i slutet av år 2013 och den sista i slutet av år 2020. Marcel räknar med en årlig ränta på 2 %.

Hur mycket pengar kommer han att ha på sitt konto omedelbart efter den sista insättningen? (2/0/0)

20. Sture har ett enmansföretag som köper in färdiga trädetaljer i furu. Han tillverkar enbart två produkter, pallar och byråer. Stures arbetsuppgifter består av att montera och lacka dessa, vilket han inte kan göra samtidigt. Följande data gäller för hans produktion:



|                   | Arbetstimmar (h) |        | Tillgängliga arbetstimmar per vecka (h) |
|-------------------|------------------|--------|-----------------------------------------|
|                   | Pall             | Byrå   |                                         |
| Montering         | 0,25             | 0,50   | 15                                      |
| Lackning          | 0,40             | 1,00   | 25                                      |
| Vinst per produkt | 150 kr           | 320 kr |                                         |

Antag att Sture tillverkar  $x$  pallar och  $y$  byråer under en vecka.

- a) Sture får en order på 40 pallar och 10 byråer. Hinner han tillverka dessa under en arbetsvecka? (2/0/0)
- b) Bestäm den maximala vinst som Stures företag kan göra under en arbetsvecka. (0/4/0)
21. Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.
- a)  $F(x) = 3e^x$  är en primitiv funktion till  $f(x) = e^{3x}$  (1/0/0)
- b) Grafen till  $f(x) = x^3 + ax$  har tre olika nollställen om konstanten  $a \leq 0$  (0/2/1)

22. Karolina håller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$$T(t) = 95e^{-0,039t}$$

där  $T$  är kaffets temperatur i °C och  $t$  är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

- a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)
- b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)
- c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

23.



Tartaglia (1500-1557)

Italienaren Tartaglia var en matematiker som levde på 1500-talet. Han anses ha formulerat följande matematiska problem, här återgivet i modern översättning:

*Summan av två positiva tal är 8. Bestäm talen så att produkten av talens differens och talens produkt blir så stor som möjligt.*

Din uppgift är att lösa Tartaglias matematiska problem. (0/0/3)

24. För tredjegradsfunktionen  $f$  gäller att

- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Bestäm  $f'(6)$

(0/0/3)

25. När Mario föds bestämmer sig hans mormor för att spara pengar åt honom i en burk. Mormor tänker lägga ett belopp som motsvarar kvadraten av Marios ålder multiplicerat med 100, varje gång han fyller år. Marios farbröder Sergio och Riccardo funderar över hur mycket pengar mormor kommer att ha i burken på Marios 6-årsdag.

Sergio säger: *Man får reda på hur mycket pengar som finns i burken genom att*

*beräkna integralen  $\int_0^6 100x^2 dx$*

Riccardo funderar ett tag och svarar: *Nej, den ger ett för litet värde.*

Förklara varför integralen ovan ger ett för litet värde om man använder den för att räkna ut hur mycket pengar det finns i burken på Marios 6-årsdag.

(0/1/3)