Del B	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 12-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 25 E-, 24 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där *"Endast svar krävs"* behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Bestäm *alla* primitiva funktioner till $f(x) = x^2$ ______________________ (1/0/0)

2. Förenkla så långt som möjligt

a) $\dfrac{3x+24}{2x+16}$ ______________________ (1/0/0)

b) $x(x^8+2)+2x^9-2x$ ______________________ (1/0/0)

3. Vilket av alternativen A-E är korrekt?

A. $|3| = -3$

B. $|-3| = 3$

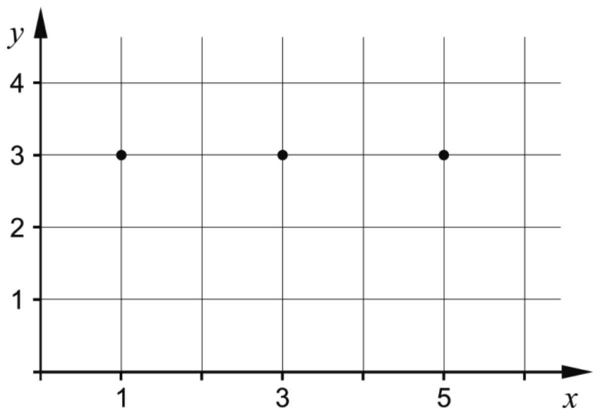
C. $|-3| = -3$

D. $-|3| = 3$

E. $-|-3| = 3$ ______________________ (1/0/0)

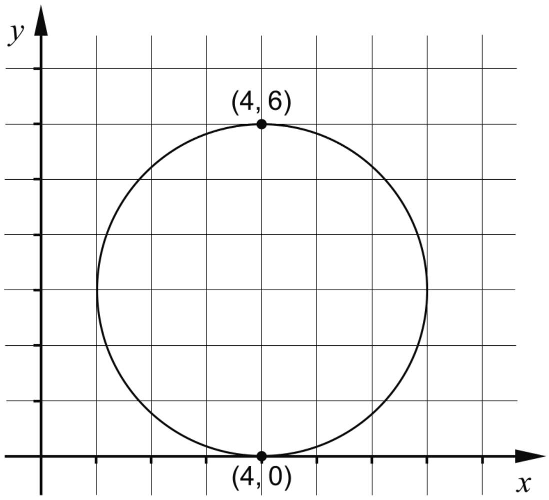
4. Funktionen f är kontinuerlig. Rita i koordinatsystemet nedan en skiss som visar hur grafen till f kan se ut om det gäller att:

- Grafen går genom de markerade punkterna $(1, 3)$, $(3, 3)$ och $(5, 3)$
- $f'(1) > 0$
- $f'(3) < 0$
- $f'(5) > 0$



(1/0/0)

5. I figuren visas en cirkel som tangerar x-axeln i punkten $(4,0)$.
Punkten $(4,6)$ ligger på cirkeln. Ange cirkelns ekvation.



________________________ (1/0/0)

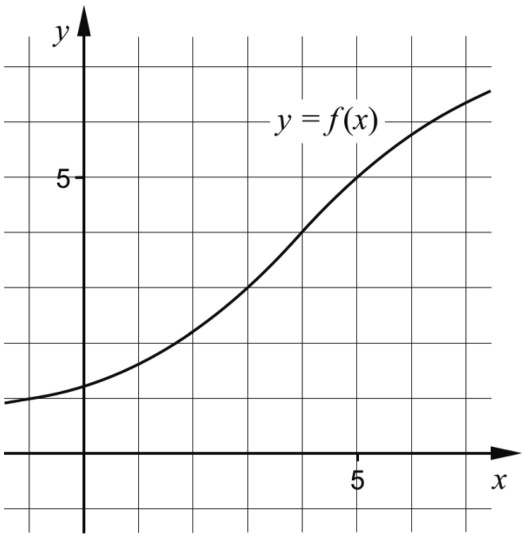
6. Bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = 3x^4 - 7x + 5$ ________________________ (1/0/0)

b) $f(x) = x^k + k$ ________________________ (0/1/0)

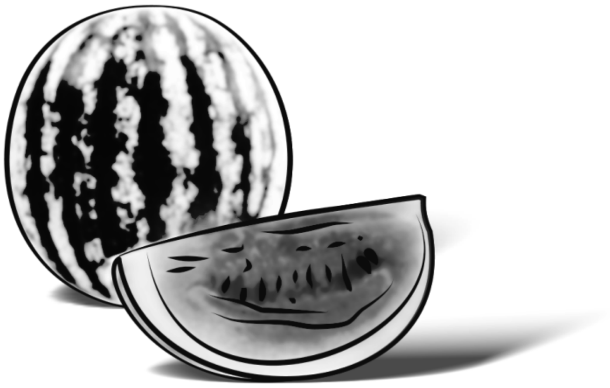
c) $f(x) = \dfrac{x + 5x^2}{x}$ ________________________ (0/1/0)

7. Figuren visar grafen till funktionen f. Bestäm ett närmevärde till $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$



________________________ (0/1/0)

8. Funktionen f beskriver hur en växande vattenmelons vikt y beror av tiden t, det vill säga $y = f(t)$. Vikten y anges i hg (hektogram) och tiden t i veckor.



Vad får du veta genom att bestämma $f'(3)$?
Välj ett av alternativen A-E. ______________________ (0/1/0)

A. Den vikt i hg som vattenmelonen har vid tiden 3 veckor.

B. Vattenmelonens viktökning i hg under 3 veckor.

C. Vattenmelonens genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.

D. Den tid det tar för vattenmelonens vikt att öka till 3 hg.

E. Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

9. a) Ge ett exempel på en polynomfunktion f av fjärde graden för vilken det gäller att $f(1) = 4$

______________________ (0/1/0)

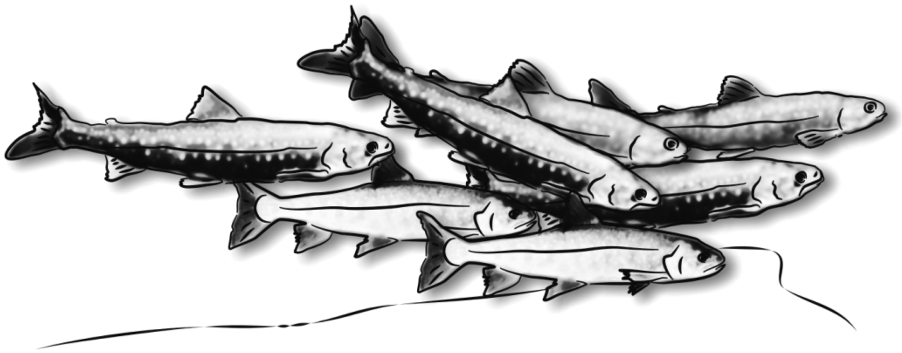
b) Det finns flera rationella uttryck som uppfyller följande villkor:

- Uttrycket får värdet 0 då $x = -1$
- Uttrycket är inte definierat för $x = 3$
- Uttrycket är inte definierat för $x = -4$

Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som uppfyller alla tre villkor. ______________________ (0/1/1)

10. I en sjö planterar man in fiskar av en art som inte funnits där tidigare. Fiskpopulationen kan beskrivas med sambandet

$N(t) = \dfrac{15000}{3 + 2e^{-0,5 \cdot t}}$ där N är antalet fiskar och t är tiden i år efter inplanteringen.



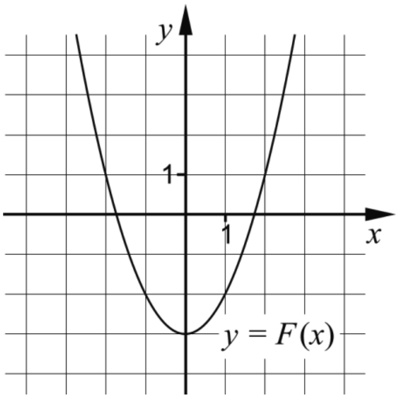
a) Hur många fiskar planterades in i sjön från början?

_______________________ (0/1/0)

b) På grund av olika miljöfaktorer kan antalet fiskar inte bli hur stort som helst. Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar med hjälp av sambandet.

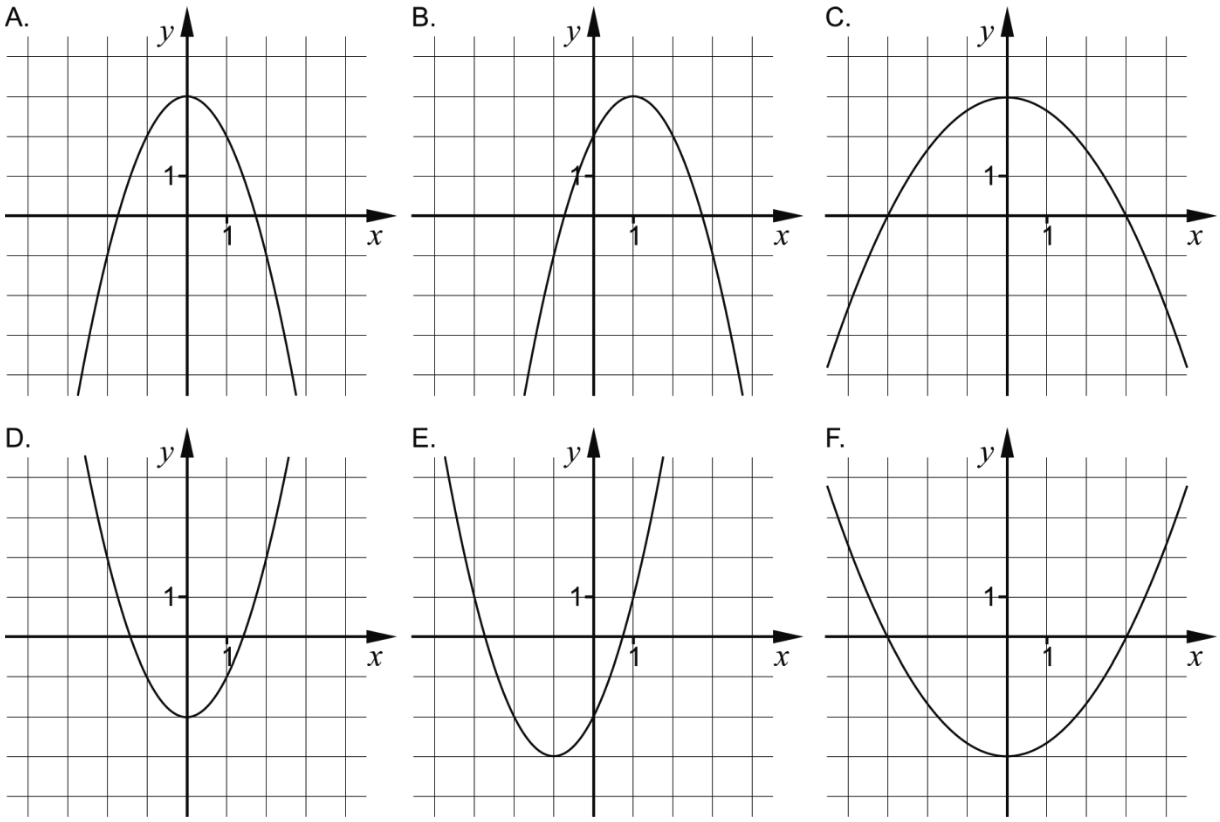
_______________________ (0/0/1)

11. Funktionen f har en primitiv funktion F. Grafen till F visas i figuren nedan.



a) Vilken av graferna A-F visar en annan primitiv funktion till f ?

________________________ (0/1/0)



En annan funktion g har en primitiv funktion G. En av graferna A-F visar den primitiva funktionen G.

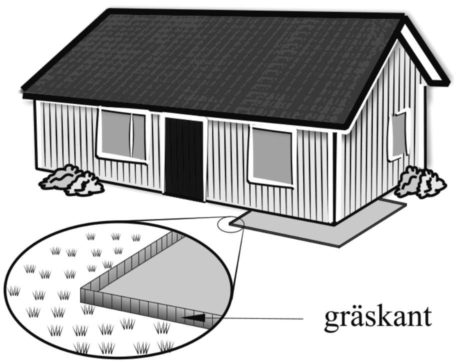
b) Vilken av graferna A-F visar G om $\int_0^1 g(x)\,dx = 3$?

________________________ (0/0/1)

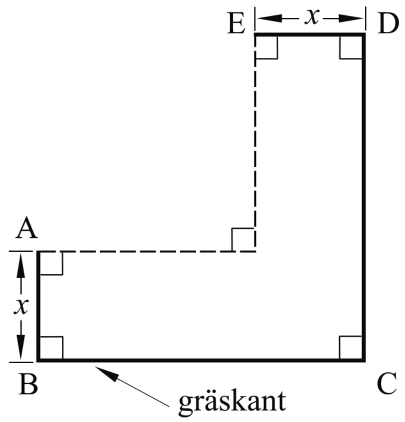
Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Beräkna $\int_1^2 3x^2 \, dx$ algebraiskt. (2/0/0)

13. En trädgårdsmästare ska göra en blomrabatt runt hörnet på ett hus. Längs sidorna som inte angränsar mot huset kommer hon att sätta gräskant, se figur 1. Hon vill utforma rabatten så att sidorna BC och CD är lika långa, se figur 2.



figur 1



figur 2

I trädgårdsmästarens förråd finns en rulle med 6 m gräskant och hon tänker använda hela rullen. Arean för blomrabatten blir då

$A(x) = 6x - 3x^2$

där x är blomrabattens bredd i meter, se figur 2.

a) Trädgårdsmästaren vill att blomrabatten ska ha så stor area som möjligt. Beräkna med hjälp av derivata bredden x så att arean blir maximal. (2/0/0)

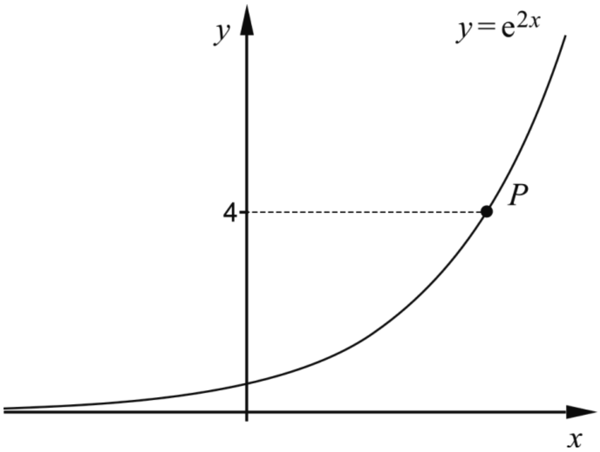
b) Vilka värden kan arean A anta i detta sammanhang? (1/2/0)

c) Visa att arean för blomrabatten i figur 2 kan beskrivas av $A(x) = 6x - 3x^2$ om trädgårdsmästaren använder 6 m gräskant. (0/1/2)

14. Beräkna $\dfrac{(x+8)^6 - (x+8)^5}{(x+8)^5}$ då $x = 2,7$

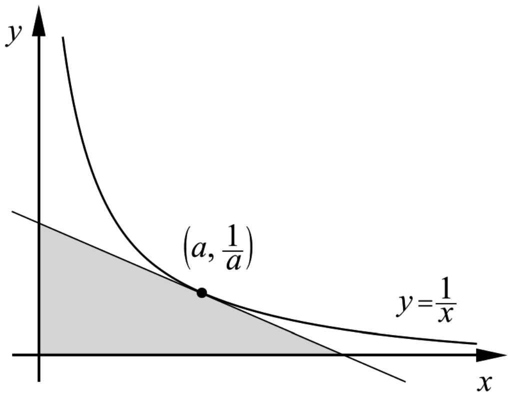
Svara exakt. (0/2/0)

15. Kurvan $y = e^{2x}$ är ritad i figuren nedan. Punkten P har y-koordinaten 4



Bestäm kurvans lutning i punkten P.
Svara exakt och på så enkel form som möjligt. (0/3/0)

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = \dfrac{1}{x}$ har arean 2 areaenheter *oavsett* var tangenten tangerar kurvan.



Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ (0/1/3)

Del D	Uppgift 17-24. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 25 E-, 24 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 19 poäng
D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 36 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 52 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där *"Endast svar krävs"* behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____________________

Födelsedatum: ____________________

Gymnasieprogram/Komvux: ____________________

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Nyfödda barn minskar normalt i vikt under de första dygnen, därefter ökar vikten. Efter tre dygn är vikten som lägst.

Enligt en förenklad modell kan vikten för ett nyfött barn beskrivas med
$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$
där V är vikten i gram och t är tiden i dygn efter födseln.

a) Hur mycket minskar ett barn i genomsnitt i vikt per dygn under de tre första dygnen? (2/0/0)

b) Utvärdera hur väl modellen stämmer överens med verkligheten när barnet är några veckor gammalt. (2/0/0)

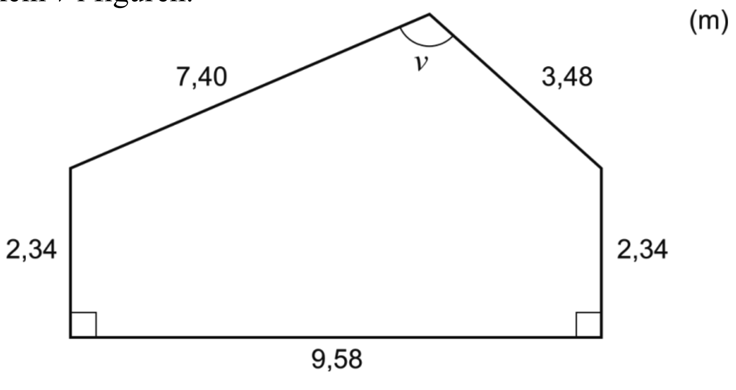
18. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ och att f är definierad i intervallet $0 \leq x \leq 4$. Bestäm funktionens minsta och största värde. (2/0/0)

19. För en funktion f där $y = f(x)$ gäller att $f(3) = 4$ och $f'(3) = 2{,}4$
Lotta tänker en stund och påstår:

–Om det är en rät linje måste f(100) vara exakt 244

Undersök om Lottas påstående är korrekt. (2/0/0)

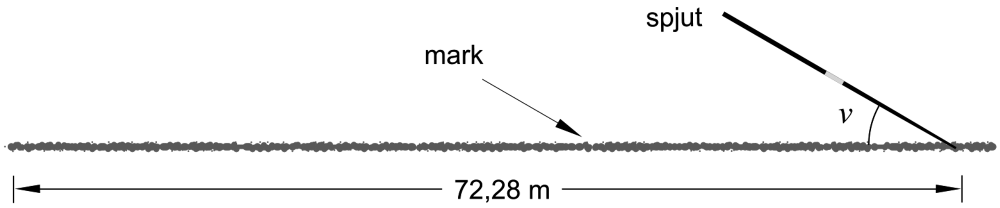
20. Beräkna vinkeln v i figuren. (2/0/0)



21. Världsrekordet för damer i spjutkastning är 72,28 m och sattes i Stuttgart 2008 av Barbora Špotáková från Tjeckien.

Kastlängden mäts till den punkt där spjutspetsen tar mark. Det finns en regel som säger att kastplanen kan få luta lite (uppåt eller nedåt) men då får lutningen som högst vara 1:1000 i kastriktningen. Det betyder att på 1000 m är höjdskillnaden 1 m.

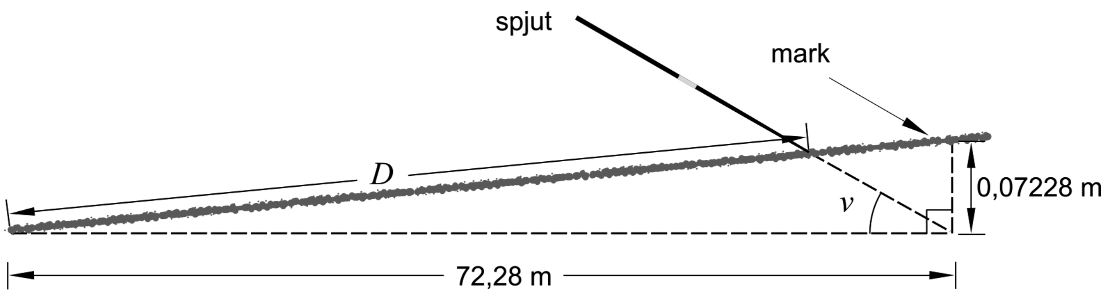
Antag att Špotákovás världsrekord på 72,28 m gjordes på en kastbana utan lutning och att spjutet bildade vinkeln $v = 30{,}0°$ mot marken vid nedslaget. Se figur 1.



figur 1

När kastplanen lutar uppåt blir kastlängden lite kortare. Vilken kastlängd D hade Špotákovás kast fått på en bana med maximalt tillåten lutning uppåt? Se figur 2.

Svara i meter med två decimaler.

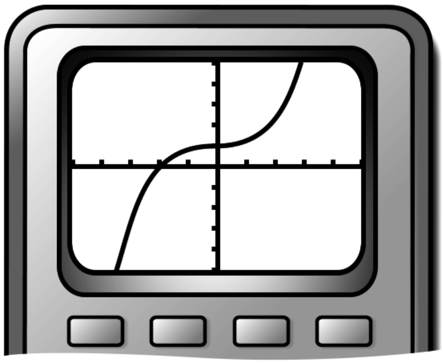


figur 2

(0/4/0)

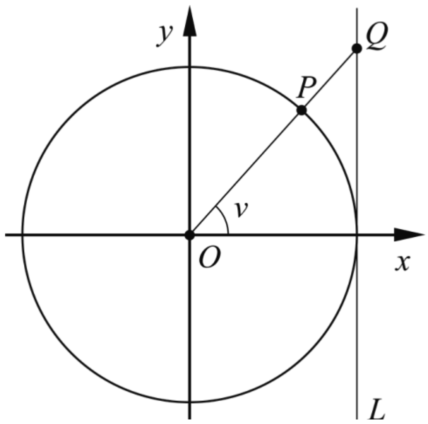
22. Peder ritar upp grafen till $f(x) = x^3 + 0{,}03x + 1$ på sin grafritande räknare och säger:

–*Jag ser att grafen har en terrasspunkt.*



Undersök om han har rätt. (0/2/0)

23. I figuren nedan visas en enhetscirkel som tangeras av en linje L som är parallell med y-axeln. För vinkeln v gäller att $0° < v < 90°$
Punkterna O, P och Q ligger på samma linje. Punkten Q har y-koordinaten t.



Bestäm $\cos v$ uttryckt i t (0/0/3)

24. S är en kontinuerlig funktion som är definierad för alla x.
Bestäm $S'(4)$ då $S(x+h) = S(x) + h$ (0/0/3)