

---

---

## Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

---

---

### Uppgift nr 1 (5746)

**Max 1/0**

Korrekt svar ( $y = Ce^{-6x}$ )

+1 g

### Uppgift nr 2 (5747)

**Max 3/0**

a) Korrekt svar ( $2 - i$ )

+1 g

b) Korrekt svar ( $2i$ )

+1 g

c) Korrekt svar ( $1 - 2i$ )

+1 g

### Uppgift nr 3 (5378)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer absolutbeloppet eller argumentet

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ )

+1 g

### Uppgift nr 4 (5588)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. redovisar det första steget korrekt

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,125)

+1 g

### Uppgift nr 5 (5410)

**Max 1/1**

Godtagbar ansats, t.ex. utvecklar  $z^2 - z$  korrekt

+1 g

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $k = \pm\sqrt{6}$ )

+1 vg

Uppgift nr 6 (5377)

**Max 1/2**

- a) Godtagbar ansats, bestämmer absolutbeloppet eller argumentet med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (+1 g)  
 $(w = 2^5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ))$  (+1 vg)
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex.  $z_2 = 2(\cos 92^\circ + i \sin 92^\circ)$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 7 (5589)

**Max 1/1**

- a) Godtagbar verifiering av att  $y = 2e^{5x}$  är en lösning (+1 g)
- b) Godtagbar lösning med korrekt svar ( $y = Ce^{2x} + 2e^{5x}$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 8 (5099)

**Max 1/1**

- Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp  $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$  (+1 g)  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z = 3 \pm 2i$ ) (+1 vg)

Uppgift nr 9 (5402)

**Max 1/2**

- Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer den allmänna lösningen,  $y = A \cos 2x + B \sin 2x$  (+1 g)  
 med godtagbar bestämning av lösningskurvan ( $y = 3 \cos 2x$ ) (+1 vg)  
 med godtagbar verifiering av maximum (+1 vg)

Uppgift nr 10 (5392)

**Max 0/3**

- a) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer uttryck för  $y'''$  korrekt (+1 vg)  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $k = -2$ ) (+1 vg)
- b) Godtagbar bestämning av ytterligare två lösningar med godtagbar motivering (+1 vg)  
 (t.ex.  $y = 2e^{-2x}$ ,  $y = 0$ )

Uppgift nr 11 (5119)

Max 0/2/□

Godtagbar ansats, t.ex. inser att  $z=1$  är ett nollställe till  $z^5 - 1$  +1 vg  
 med godtagbar fortsättning, t.ex. korrekt genomförd faktorisering

$$z^5 - 1 = (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z - 1) \quad +1 \text{ vg}$$

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	tolka $z^5 - 1 = (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \cdot (z - 1)$ och ge en godtagbar motivering till varför varje nollställe till $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ också måste vara ett nollställe till $z^5 - 1$
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Total poäng
	Lägre	Högre		
<p><b>Metodval och genomförande</b>  <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.  Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	<p>Eleven beräknar <math>V</math> samt <math>a</math> för minst ett värde på <math>p</math>.</p>	<p>Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att beräkna <math>a</math> för minst två värden på <math>p</math></p>	<p>Eleven bestämmer <math>a</math> för minst två värden på <math>p</math> och inleder en generell undersökning, t.ex. tecknar ekvationen</p> $\pi \int_0^a x^{2p} dx =$ $2 \cdot \pi \int_0^1 x^{2p} dx$	
	<b>1-2 g</b>	<b>2 g och 1 vg</b>	<b>2 g och 2 vg</b>	<b>2/2</b>
<p><b>Matematiska resonemang</b>  <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.</i></p>	<p>Eleven drar någon slutsats om sambandet mellan <math>a</math> och <math>p</math> (t.ex. "<math>a</math> blir mindre då värdet på <math>p</math> blir större") grundat på en undersökning av minst två specialfall.</p>	<p>Eleven beskriver godtagbart hur <math>a</math> beror av <math>p</math> med hjälp av en generell beräkning eller grundat på en undersökning av minst tre specialfall,  t.ex. <math>a = 2^{\frac{1}{2p+1}}</math></p>		
	<b>1 g</b>	<b>1 g och 1 vg</b>		<b>1/1</b>
<p><b>Redovisning och matematiskt språk</b>  <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>		<p>Redovisningen är lätt att följa och förstå och omfattar mer än tre av punkterna. Det matematiska språket är acceptabelt.</p>		
		<b>1 vg</b>		<b>0/1</b>
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>

**MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida**

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod, t.ex. teckna ekvationen $\pi \int_0^a x^{2p} dx = 2 \cdot \pi \int_0^1 x^{2p} dx$ och påbörja en lösning av ekvationen.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att slutsatsen gäller, $a = 2^{\frac{1}{2p+1}}$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgift nr 13 (5587)

**Max 2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar  $z = -19 \pm \sqrt{361 - 650}$  +1 g  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ( $z = -19 \pm 17i$ ) +1 g

Uppgift nr 14 (5113)

**Max 3/0**

- a) Korrekt svar ( $y' = 0,2y$ ) +1 g
- b) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer differentialekvationens lösning,  $y = 500e^{0,2t}$  +1 g  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $2 \cdot 10^5$ ) +1 g

Uppgift nr 15 (5388)

**Max 0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar  $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ( $4,0 \text{ cm}^2/\text{dygn}$ ) +1 vg

Uppgift nr 16 (5386)

Max 0/2

Ställer upp ett korrekt integraluttryck för volymen,  $\pi \int_0^2 (xe^{-x})^2 dx$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,598 v.e.) +1 vg

Uppgift nr 17 (5102)

Max 1/1/□

Godtagbar ansats, t.ex. anger något korrekt  $z_3$  +1 g  
 Inser att  $z_3$  kan ligga på linjerna där  $\operatorname{Re} z = \pm 1$  eller  
 bestämmer att  $z_3$  kan ligga på kurvan  $|z| = 1$  +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod och visa att $z_3$ ligger på kurvan $ z  = 1$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att $z_3$ ligger på linjerna där $\operatorname{Re} z = \pm 1$ och på kurvan $ z  = 1$
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	analysera sin slutsats och poängtera att $z_3$ dock inte får sammanfalla med $z_1$ eller $z_2$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Uppgift nr 18 (5393)

Max 0/2/□

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar  $w$  korrekt med hjälp av produktregeln eller visar att  $w$  är konstant genom att sätta in  $u = Ce^{-ax}$  +1 vg  
 med i övrigt godtagbart slutfört bevis där vissa motiveringar kan vara bristfälliga eller saknas +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	korrekt slutföra beviset.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 11.

Elevlösning 1 (2 vg och en MVG-kvalitet)

11)  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ , s nollställena är  
nollställena till  $z^5 - 1$   
 $f(x) = z^5 - 1$ ,  $g(x) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

$f(x) = 0$  ger nollställena  
 $\Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow z^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}}$   
 $z = 1 \Rightarrow z - 1 = 0$  är en lösning

Om  $f(x)/g(x)$  inte har någon rest  
betyder det att  $g(x)$  är en lösning till  $f(x)$   
och det betyder att varje lösning till  $g(x)$   
är en lösning till  $f(x)$

$$\begin{array}{r} z-1 \\ \hline z^5-1 \quad (z^4+z^3+z^2+z+1) \\ - (z^5+z^4+z^3+z^2+z) \\ \hline -z^4-z^3-z^2-z-1 \\ - (-z^4-z^3-z^2-z-1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$f(x)/g(x)$  ger inte någon rest utan  $g(x)$

kan dela  $f(x)$  helt.  $\Rightarrow$   
 $g(x)$  är <sup>själv</sup> en lösning till  $f(x)$  och det  
betyder att varje lösning till  $g(x)$   
är en lösning till  $f(x)$

*Kommentar:* Eleven ger en godtagbar motivering av varför varje nollställe till  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  också måste vara ett nollställe till  $z^5 - 1$ , vilket innebär att eleven erhåller MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Däremot anses eleven inte kunna uppnå MVG-kvalitet vad gäller matematiskt språk. T.ex. betecknas funktionen  $f(x)$  men funktionen innehåller variabeln  $z$ . Eleven hänvisar också felaktigt (på ett flertal ställen) att  $g(x)$  är en lösning till  $f(x)$ .



Elevlösning 2 (2 vg och två av MVG-kvaliteterna)

11)

$z = 1$  är ett nollställe till  $z^5 - 1$

$z^5 - 1$  är delbart med  $z - 1$

Genom polynomdivision borde man få<sup>o</sup>

$$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

Kontroll

$$\begin{aligned} (z-1) \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) &= \\ z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z - z^4 - z^3 - z^2 - z - 1 &= \\ = z^5 - 1 \end{aligned}$$

dvs

$$z^5 - 1 = (z - 1) \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Om höger ledet blir 0 så måste vänsterledet bli noll. Alltså måste alla nollställena till  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  vara nollställena till  $z^5 - 1$

*Kommentar:* Eleven drar den korrekta slutsatsen att  $z = 1$  är ett nollställe och motiverar varför varje nollställe till  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$  också är nollställen till  $z^5 - 1$  och erhåller därmed MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Redovisningen är välstrukturerad och med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk och uppfyller därmed MVG-kvaliteten för matematiskt språk.

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 12.**  
**Elevlösning 1 (3 g och 1 vg)**

12).  $p = 1$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \text{ v.e}$$

$$2V = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi \int_0^a x^2 dx = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$a = \sqrt[3]{2}$$

$p = 2$

$$\pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5} \text{ v.e} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$$

$$\pi \int_0^a x^4 dx = \frac{\pi a^5}{5} \Rightarrow a = \sqrt[5]{2}$$

$p = 3$

$$\pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \frac{\pi}{7} \text{ v.e} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$$

$$\pi \int_0^a x^6 dx = \frac{\pi a^7}{7} \Rightarrow a = \sqrt[7]{2}$$

Slutsats: Det verkar som att sambandet är att  $a$  är udda rot ur 2  
 $a = \sqrt[3]{2}$ ,  $a = \sqrt[5]{2}$ ,  $a = \sqrt[7]{2}$  osv...

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	x	2/1	
Matematiska resonemang	x	1/0	
Redovisning och matematiskt språk		0/0	
<b>Summa</b>		<b>3/1</b>	

Kommentar: Eleven drar en enkel slutsats om sambandet för  $a$ . Däremot görs ingen koppling mellan  $a$  och  $p$  i slutsatsen. Lösningen erhåller därmed 1 g för matematiska resonemang

Elevlösning 2 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna).

1/2)  $p = 1 \Rightarrow y = x$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{3}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$$

$$\frac{\pi a^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{2}}$$

$p = 2 \Rightarrow y = x^2$

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{5}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^4 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{a^5 \pi}{5}$$

$$\frac{a^5 \pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow a^5 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[5]{2}}$$

$p = 3 \Rightarrow y = x^3$

$$V = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{\pi}{7} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{7}$$

$$V_1 = \pi \int_0^a x^6 dx = \pi \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^a = \frac{a^7 \pi}{7}$$

$$\frac{a^7 \pi}{7} = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow a^7 = 2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[7]{2}}$$

Slutsats:  $a$  minskar med  $\sqrt[2p+1]{2}$

för varje grad  $p$  på  $p$  då volymen skall dubbleras (om volymen ökas 3 ggr blir det  $\sqrt[2p+1]{3}$  osv)

$$\begin{aligned}
 \bullet V &= \pi \int_0^1 x^{2p} dx = \pi \left[ \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2p+1} \Rightarrow 2V = \frac{2\pi}{2p+1} \\
 V_1 &= \pi \int_0^a x^{2p} dx = \pi \left[ \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^a = \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1} \\
 \frac{2\pi}{2p+1} &= \frac{\pi a^{2p+1}}{2p+1} \Rightarrow a^{2p+1} = 2 \\
 a &= \sqrt[2p+1]{2}
 \end{aligned}$$

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och Genomförande	-----x----->	2/2	
Matematiska resonemang	-----x----->	1/1	
Redovisning och matematiskt språk	-----x----->	0/1	
<b>Summa</b>		<b>3/4</b>	

*Kommentar:* Eleven visar MVG-kvaliteter genom att behandla den generella lösningen och visa hur  $a$  beror av  $p$ . Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

**Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17.**

**Elevlösning 1 (1 g och 1 vg och en av MVG-kvaliteterna)**

17) För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_1$  så måste  $z_3 = -1 + bi$  ✓  
där  $b < 0$  eller  $b > 0$ .  
För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_2$  så måste  $z_3 = 1 + bi$   
där  $b < 0$  eller  $b > 0$ .  
För att  $\triangle z_1 z_2 z_3$  ska vara rätvinklig  
i vinkeln  $z_3$  så måste linjerna  
 $(z_1 z_3)^2 + (z_2 z_3)^2 = (z_1 z_2)^2$

*Kommentar:* Eleven utför en korrekt analys av hur linjerna kring  $z_1$  och  $z_2$  ska vara och dessutom poängterar att  $z_3$  inte får sammanfalla med  $z_1$  eller  $z_2$ . Lösningen uppfyller därmed MVG-kvaliteten för bevis och analys. Eleven har påbörjat diskussion kring cirkeln men slutför den ej och erhåller därför inte MVG-kvaliteterna för "tolkning" och "utvecklar problem".

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 18.

Elevlösning 1 (2 vg)

$$18) \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

$$w = u e^{ax}$$

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = u' e^{ax} + a u e^{ax}$$

$$0 = -a C e^{-ax} e^{ax} + C e^{-ax} a e^{ax}$$

$$a C e^{-ax} e^{ax} = a C e^{-ax} e^{ax}$$

$$VL = HL$$

Svar: Härledningarna ovan visar att

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

$u$  är en lösning

$$u = C e^{-ax}$$

$$u' = -a C e^{-ax}$$

byter ut  $u$  och  $u'$

mot deras värden

*Kommentar:* Elevens lösning bygger på likheten som ska visas och erhåller därför inte MVG-kvaliteten för bevis.