==

Bedömningsanvisningar

Inom parentes anges ett exempel på ett godtagbart svar.

==

Uppgift nr 1 (5855)

Max 3/0

a)	Korrekt svar (41)	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex förlänger med konjugatet	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(-\frac{1}{5}+\frac{7\mathrm{i}}{5}\right)$	+1 g

Uppgift nr 2 (6037)

Max 2/0

Godtagbar metod	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z=1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}$)	+1 g

Uppgift nr 3 (5859)

Max 3/0

Korrekt uppställd och löst karakteristisk ekvation	+1 g
med korrekt allmän lösning till differentialekvationen	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y=5\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{7x}$)	+1 g

Uppgift nr 4 (5856)

Max 2/0

Korrekt uppställd integral	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (8π)	+1 g

Uppgift nr 5 (5858)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex tecknar sambandet $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(1+\mathrm{i})$	+1 g

© Skolverket 2012

Uppgift nr 6 (5857)

Max 1/1

Godtagbar ansats, bestämmer $\mid z_2 \mid$ eller $\arg(z_2)$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z_2 = 3(\cos 10° + i \sin 10°)$)	+1 vg

Uppgift nr 7 (5860)

Max 0/1

Korrekt svar (B: $\mid z-2-i \mid \leq 1$ och $\operatorname{Re} z \geq 2$)	+1 vg

Uppgift nr 8 (5381)

Max 2/2/¤

a)	Godtagbar ansats, t ex visar att derivatan har ett nollställe för $x = 1$	+1 g
	med godtagbar motivering av att det är en maximipunkt	+1 g
b)	Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatans övriga nollställen, $x = \pm\sqrt{2}$ *	+1 vg
	med godtagbart slutfört bevis av att f har ett minimum för $x = -\sqrt{2}$, där vissa motiveringar kan vara bristfälliga eller saknas	+1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod (faktorsatsen) för att lösa ekvationen $f'(x) = 0$ *
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	genomföra beviset formellt korrekt.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den första vg-poängen delas ut.

© Skolverket 2012

Uppgift nr 9 (5864)

Max 3/4/¤

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar:

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

Bedömningen avser	**Kvalitativa nivåer** **Lägre**		**→ Högre**	**Total poäng**
Metodval och genomförande *I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.* *Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.*	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett värde på $a \neq 0$ **1 g**	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett positivt och ett negativt värde på *a*. **2 g**	Eleven bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + az = 0$ för minst ett positivt och ett negativt värde på *a* *och* bestämmer antalet reella och icke reella rötter för ekvationen $z^3 + b = 0$ för minst ett värde på $b \neq 0$ **2 g och 1 vg**	**2/1**
Matematiska resonemang *Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiskt resonemang.*	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *eller* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på ett specialfall. **1 g**	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *eller* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på några specialfall eller generella undersökningar. **1 g och 1 vg**	Eleven formulerar en godtagbar slutsats i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ *och* i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$ baserat på några specialfall eller generella undersökningar. **1 g och 2 vg**	**1/2**
Redovisning och matematiskt språk *Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.*		Redovisningen är lätt följa och förstå. Det matematiska språket är acceptabelt. **1 vg**		**0/1**
Summa				**3/4**

© Skolverket 2012

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	genomföra generella undersökningar både i fallet $z^3 + az = 0, a \neq 0$ och i fallet $z^3 + b = 0, b \neq 0$
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	med godtagbar motivering dra slutsatsen att det möjliga antalet reella rötter till ekvationen är ett eller tre.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	visa att ekvationen har 1 reell rot och 2 icke-reella rötter i fallet $z^3 + az + b = 0, a > 0$
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk. Redovisningen omfattar vissa generella beräkningar eller resonemang.

Uppgift nr 10 (6038)

Max 2/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer den allmänna lösningen $y = Ce^{0,2x}$	+1 g
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (27)	+1 g

Uppgift nr 11 (6039)

Max 2/2

a)	Godtagbar ansats, t ex ställer upp en differentialekvation som beskriver förloppet, $y' = 0,05y$	+1 g
b)	Godtagbar lösning med korrekt svar ($y(t) = 200e^{0,05t}$)	+1 g
c)	Ställer upp en differentialekvation som gäller i intervallet $30 \leq t \leq 50$ och anger begynnelsevillkoret $y(30) \approx 896$	+1 vg
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($y(t) = 110e^{0,07t}$)	+1 vg

© Skolverket 2012

Uppgift nr 12 (5869)

Max 1/2

a)	Godtagbar ansats, t ex tecknar $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	+1 g
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,9 cm/min)	+1 vg
b)	Godtagbar lösning med godtagbart svar (240 cm^2/min)	+1 vg

Uppgift nr 13 (6018)

Max 0/2

a)	Godtagbar motivering av att f har en lokal maximipunkt	+1 vg
b)	Godtagbar bestämning av x-koordinaten ($x \approx 0{,}541$)	+1 vg

Uppgift nr 14 (5871)

Max 0/1

Godtagbar ansats, t ex beskriver ett område som begränsas av $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	+1 vg

Uppgift nr 15 (6020)

Max 0/3/¤

Godtagbar ansats, t ex beräknar dammens volym, 170 liter	+1 vg
Ställer upp en ekvation för bestämning av tiden*	+1 vg
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (13 min)	+1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda en generell metod och ställa upp en ekvation för bestämning av tiden*.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

*MVG-kvaliteten gällande generella metoder utfaller samtidigt som den andra vg-poängen delas ut.

© Skolverket 2012

Uppgift nr 16 (6017)

Max 0/3/¤

a) Godtagbar ansats, t ex inser att $k = 2$ ska vara rot till den karakteristiska ekvationen till $y'' - ay' + ay = 0$ +1 vg

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 4$) +1 vg

b) Bestämmer den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ eller visar att det finns någon funktion som är lösning till $y'' - 4y' + 4y = 0$ men inte till $y' - 2y = 0$ +1 vg

MVG-kvalitet	**visar eleven i denna uppgift genom att:**
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	dra slutsatsen att alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$ med korrekt motivering.
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	redovisa välstrukturerat och tydligt med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

© Skolverket 2012

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 9.

Elevlösning 1 (3 g och 4 vg och tre av MVG-kvaliteterna)

- $a = 1$, $b = 0$ ger

$$z^3 + z = 0$$
$$z(z^2+1) = 0$$
$$z^2 + 1 = 0$$
$$z^2 = -1$$
$$z = \pm i$$

Svar: 1 reell, 2 icke-reella

- $a = -1$, $b = 0$ ger

$$z^3 - z = 0$$
$$z(z^2-1) = 0$$
$$z^2 - 1 = 0$$
$$z^2 = 1$$
$$z = \pm 1$$

Svar: 3 reella rötter

- $a \neq 0$, $b = 0$ ger

$$z^3 + az = 0$$
$$z(z^2+a) = 0 \qquad z_1 = 0 \text{ reell}$$
$$z^2 + a = 0$$
$$z^2 = -a$$
$$z = \pm\sqrt{-a}$$

$a > 0$ 2 icke reella

$a < 0$ 2 reella

- $a = 0$, $b = 1$ ger

$$z^3 + 1 = 0 \qquad z = re^{\varphi i} \quad |-1| = 1 \quad \arg(-1) = \pi$$
$$z^3 = -1$$
$$r^3 e^{3\varphi i} = 1e^{\pi i}$$
$$r^3 = 1 \qquad 3\varphi = \pi + n2\pi \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$
$$r = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3}$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Svar: En reell, två icke-reella

-

a	b	reella rötter	imaginära rötter
1	0	1	2
-1	0	3	0
0	1	1	2

$a = 0$
$b \neq 0$ ger $z^3 + b = 0$
$z^3 = -b$

$\boxed{b < 0 \text{ ger positivt tal}}$

positiva reella b har $|b| = b$
$\arg(b) = 0$

$z^3 = r^3 \cdot e^{3\varphi i}$ $\quad r = \sqrt[3]{b} = R$

$r^3 \cdot e^{3\varphi i} = b e^{0i}$

$3\varphi = 0 + n2\pi \quad n = 0,1,2$

$\varphi = \frac{n2\pi}{3}$

$z_1 = R(\cos 0 + i \sin 0) = R$ reell

$z_2 = R(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = -\frac{R}{2} + R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = R(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -\frac{R}{2} - R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a = 0$
$b < 0$ ger 1 reell rot, 2 imaginära rötter

$\boxed{b > 0 \text{ ger negativt tal}}$

negativa reella b har $|b| = b$
$\arg(b) = \pi$

$z^3 = r^3 \cdot e^{3\varphi i}$

$r^3 \cdot e^{3\varphi i} = b e^{\pi i}$

$3\varphi = \pi + n2\pi \quad n = 0,1,2$

$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3}$

$z_1 = R(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{R}{2} + R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = R(\cos \pi + i \sin \pi) = -R$

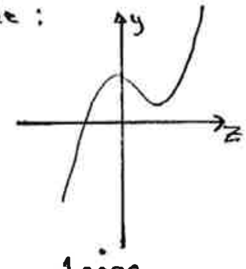
$z_3 = R(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = \frac{R}{2} - R\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$a = 0$
$b > 0$ ger 1 reell rot, 2 imaginära rötter

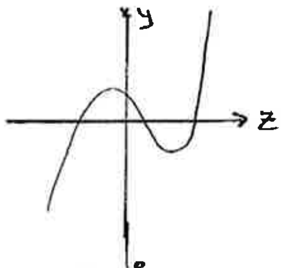
I fallet $a = 0$, $b \neq 0$ ger $b > 0$ och $b < 0$ samma svar.

$a > 0$
$b \neq 0$ ger $z^3 + az + b = 0$

Jag kan inte visa detta algebraiskt, men jag kan med text.
En tredjegradsfunktion korsar z-axeln 1 eller 3 gånger (obs, aldrig 2!) enligt följande:



1 gång



3 gånger

Om z korsas 1 gång ger det 1 reell och 2 imaginära rötter. Om z korsas 3 gånger ger det 3 reella rötter. Dock kan z endast korsas 3 gånger om det finns en z^2-term som styr så att parabeln svänger tillbaka till under nollstället, och det finns ingen z^2-term i z^3+az+b. Därför har $z^3+az+b=0$ en reell rot och två imaginära.

Resultat

a	b	Imaginära -	Reella - rötter
>0	0	2	1
<	0	0	3
0	>0	2	1
0	<0	2	1
>0	>0	2	1
>0	<0	2	1

Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	2/1	
Matematiska resonemang	1/2	
Redovisning och matematiskt språk	0/1	
Summa	**3/4**	

Kommentar: Eleven genomför generella undersökningar både i fallet $z^3+az=0$, $a\neq 0$ och i fallet $z^3+b=0$, $b\neq 0$. Eleven visar MVG-kvaliteter genom att med ett godtagbart resonemang förklara och dra slutsatsen att det möjliga antalet reella rötter är ett eller tre. Dessutom visar eleven MVG-kvalitet genom att redovisningen är välstrukturerad och det matematiska språket är i huvudsak korrekt.

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 16b.

När eleven löser uppgiften finns delar av det som krävs som lösning till 16b) i 16a). Därför innehåller exemplen på elevlösningarna båda deluppgifterna, men det är endast 16b) som bedöms.

Elevlösning 1 (1 vg).

a) $y' - 2y = 0$

$y = C \cdot e^{2x}$

$y'' - ay' + ay = 0$

$r^2 - ar + a = 0$

$r = 2$

$\longrightarrow 4 - 2a + a = 0$

$4 = a$

$y = e^{2x}(C + Dx) \quad a = 4$

b) $y = Ce^{2x} + Dx \cdot e^{2x}$

$y = Ce^{2x}$

Alla lösningar till $y' - 2y = 0$ är lösningar till $y'' - ay' + ay = 0$ för $a = 4$ om konstanten $D = 0$

Kommentar: Eleven bestämmer den allmänna lösningen men drar inte slutsatsen att det finns lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ som inte är lösningar till $y' - 2y = 0$. Lösningen erhåller därmed 1 vg-poäng

Elevlösning 2 (1 vg och en av MVG-kvaliteterna).

① $y' - 2y = 0$
② $y'' - ay' + ay = 0$ } Alla lösningar lika

① $y = Ce^{2x}$ ska vara resultat till alla lösningar på ②

$r = 2 \Rightarrow 2^2 - 2a + a = 0 \rightarrow a = 4$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

b) ② $y = e^{2x}(Cx + D)$ Om Cx är 0 så blir C·nr ① = D·nr ②

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

$\Downarrow$

$C_1 = C_2 x + D_2$ Alla fungerar som lösningar om C_2 är Noll.

Nej för att

$C_1 e^{2x} = e^{2x}(C_2 x + D_2)$

för att

$C_2 x + D$ inte är en konstant

om C_2 inte är noll.

då förändras konstanten och lösningen bara gälla i en punkt på kurvan och inte alla.

$\underline{C_1 e^{2x} = C_2 x e^{2x} + De^{2x}}$

är inte samma sak

Kommentar: Eleven ger en korrekt motivering till varför alla lösningar till $y'' - 4y' + 4y = 0$ inte är lösningar till $y' - 2y = 0$, vilket innebär att eleven erhåller MVG-kvaliteten för analys och tolkning. Däremot kan eleven inte uppnå MVG-kvalitet vad gäller matematiskt språk. T.ex. saknas redovisning av den allmänna lösningen till $y'' - 4y' + 4y = 0$ och på några ställen är kommentarerna otydliga och bristfälliga.