2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 3/0/0**

a) Korrekt svar ($f'(x) = 5\cos 5x$) +1 E_P

b) Korrekt svar ($g'(x) = 50(5x+2)^9$) +1 E_P

Kommentar: Även svaret $g'(x) = 10(5x+2)^9 \cdot 5$ godtas.

c) Korrekt svar ($h'(x) = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x$) +1 E_P

2. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar ($90°$; $\frac{\pi}{2}$) +1 E_B

b) Korrekt svar (-3) +1 E_B

3. **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar (6π) +1 E_{PL}

b) Godtagbar skiss av kurvan $y = \sin\frac{x}{2}$ där godtagbar amplitud och period framgår +1 E_B

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

4. **Max 1/1/0**

Minst en av kurvans asymptoter godtagbart inritad +1 E_B

med båda kurvans asymptoter godtagbart inritade och inga felaktiga asymptoter inritade +1 C_B

Kommentar: De två korrekta asymptoterna är $y = x - 1$ och $x = -2$

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

5. **Max 0/1/0**

Korrekt svar $(1 + \frac{\pi}{2})$ +1 C_P

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (e^2) +1 C_B

7. **Max 1/1/1**

a) Korrekt svar $(-4 - 3i)$ +1 E_B

b) Korrekt svar (t.ex. $-\frac{\pi}{4}$; $-45°$) +1 C_B

c) Godtagbar markering av linjen $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ +1 A_B

Se kapitel 3 "Exempel på bedömda elevlösningar"

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar $(-\pi^2)$ +1 A_{PL}

9. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t.ex. $\cos 36° + i \sin 36°$; $\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5}$) +1 A_B

Kommentar: Även svar med flera korrekta lösningar ges poäng, men svar av typen $\cos n36° + i \sin n36°$ ges ej poäng eftersom svaret innehåller reella lösningar.

10. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (y^8) +1 A_B

Instruktioner för bedömning av delprov C

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, förlänger med nämnarens konjugat, $\frac{(8+6\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($4-2\mathrm{i}$) +1 E_P

12. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en lösning till ekvationen korrekt +1 E_P

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två lösningar till ekvationen korrekt, t.ex. $x = 15° + n \cdot 90°$ +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar

($x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}$; $x = 15° + n \cdot 90°$ och $x = 30° + n \cdot 90°$) +1 C_P

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om VL till $\frac{a+b\mathrm{i}-(a-b\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$ +1 E_R

med i övrigt godtagbart resonemang där likheten visas +1 E_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

14. **Max 0/3/0**

a) Visar att $f(z)$ är delbart med $g(z)$, t.ex. med hjälp av polynomdivision +1 C_R

b) Godtagbar ansats, t.ex. ställer upp $(z^2+2z+10)(z^2-1)=0$ och bestämmer minst två rötter till ekvationen +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z = \pm 1$ och $z = -1 \pm 3\mathrm{i}$) +1 C_P

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. gör liknämnigt *och* använder formeln för dubbla vinkeln i täljare eller nämnare i VL, t.ex. $\frac{\sin 2x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$ +1 C_R

med i övrigt godtagbart bevis +1 C_R

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer $\cos^2 v$ och tecknar $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$ +1 C_{PL}

med godtagbar fortsättning, kommer fram till ett värde på $\tan v$ som uppfyller villkoret $\sin^2 v = \dfrac{8}{9}$, t.ex. $\tan v = \sqrt{8}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-\sqrt{8}$) +1 C_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

17. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, anger ett samband mellan a och b samt deriverar f korrekt +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = 10$ och $b = -2$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 C_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

18. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t.ex. skriver om ekvationen med subtraktionssatsen för sinus, $\sin(v - 40°) = \sin v$ +1 A_R

med i övrigt godtagbart bevis +1 A_R

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

19. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer $G'(x) = (\ln x)^2 + \dfrac{2x \ln x}{x} + 3$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = 1$ och $x_2 = \mathrm{e}$) +1 A_P

Instruktioner för bedömning av delprov D

20. **Max 1/0/0**

Godtagbart svar där det framgår att graferna ritas med olika vinkelmått +1 E_B

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

21. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $\int_0^{1,9} (4x^3 + k - 3x^2)\,dx = 13$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,6) +1 E_{PL}

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

22. **Max 3/0/0**

a) Godtagbart svar (310 W) +1 E_M

b) Godtagbar ansats, visar insikt om att derivatan ska bestämmas +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (–45 W/h) +1 E_M

Kommentar: Även svaret –45 ges poäng.

23. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, tecknar en integral för volymen med godtagbara integrationsgränser, t.ex. $\pi \int_{0,8}^{1,7} (9x - x^4 - 7)^2 dx$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (4,87 v.e.) +1 C_P

Kommentar: Även svaret 4,87 ges poäng.

24. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, tecknar en relevant integral, t.ex. $\int_0^5 0,02t \cdot e^{-0,01t^2} dt$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (7) +1 C_M

25. **Max 1/1/3**

a) Korrekt svar (39 km/h) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med godtagbart svar (8,5 timmar) +1 C_M

c) Godtagbar ansats, visar insikt om att $P(v) = 0,42 \cdot v^3$ ska integreras med avseende på x +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (320 000 MJ) +1 A_M

Lösningen (deluppgift b och c) kommuniceras på A-nivå, se kapitel 1 ”Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga” +1 A_K

Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

26. **Max 0/1/2**

Anger godtagbara värden för minst två av konstanterna +1 C_M

med godtagbart värde för ytterligare minst en konstant +1 A_M

med godtagbart svar
(t.ex. $A = 2,6$; $B = 1,6$; $C = -0,8$ och $D = 3,9$ om radianer används;

$A = 2,6$; $B = 90,0$; $C = -45,0$ och $D = 3,9$ om grader används) +1 A_M

27. **Max 0/0/3**

a) Korrekt svar (3) +1 A_{PL}

b) Godtagbart ansats, t.ex. visar insikt i att integrationsgränserna ska väljas symmetriskt runt symmetrilinjen $x = 3,5$ +1 A_R

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,2) +1 A_{PL}

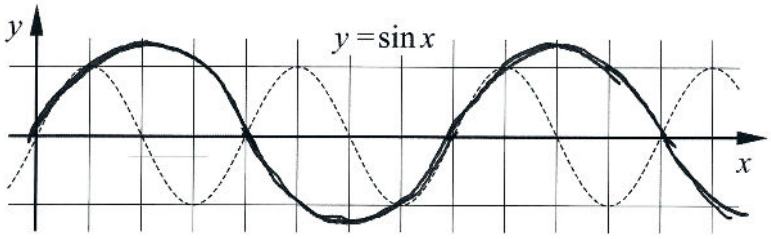
Se kapitel 3 ”Exempel på bedömda elevlösningar”

3. Exempel på bedömda elevlösningar

I det här kapitlet finns exempel på bedömda elevlösningar till vissa uppgifter i provet samt kommentarer till exemplen som stöd för bedömningen.

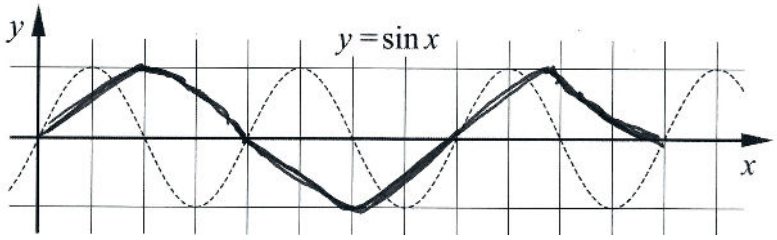
Uppgift 3

Elevlösningsexempel 3.1 (0 poäng)



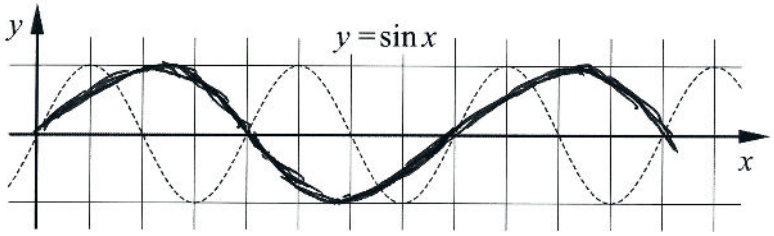
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en kurva som inte har en godtagbar amplitud. Därmed anses inte kraven för begreppspoäng på E-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 3.2 (1 E_B)



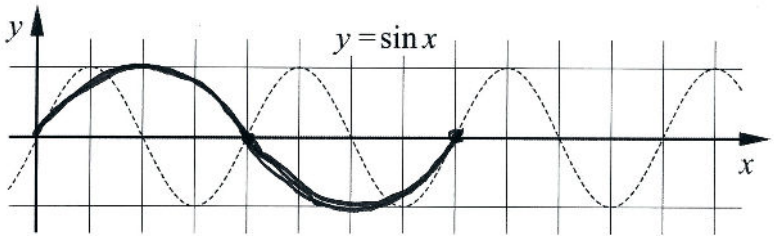
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att kurvan har en något kantig form anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 3.3 (1 E_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att kurvan är något skev och inte prickar extrempunkterna exakt anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

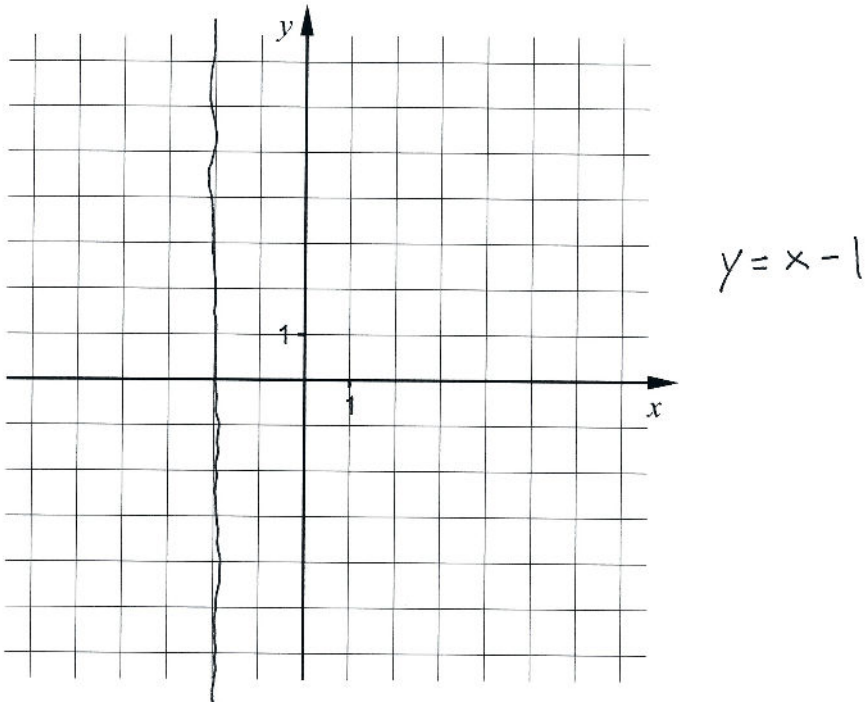
Elevlösningsexempel 3.4 (1 EB)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbar skiss där den korrekta amplituden och perioden framgår. Trots att endast en period av kurvan är ritad anses kraven för begreppspoäng på E-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

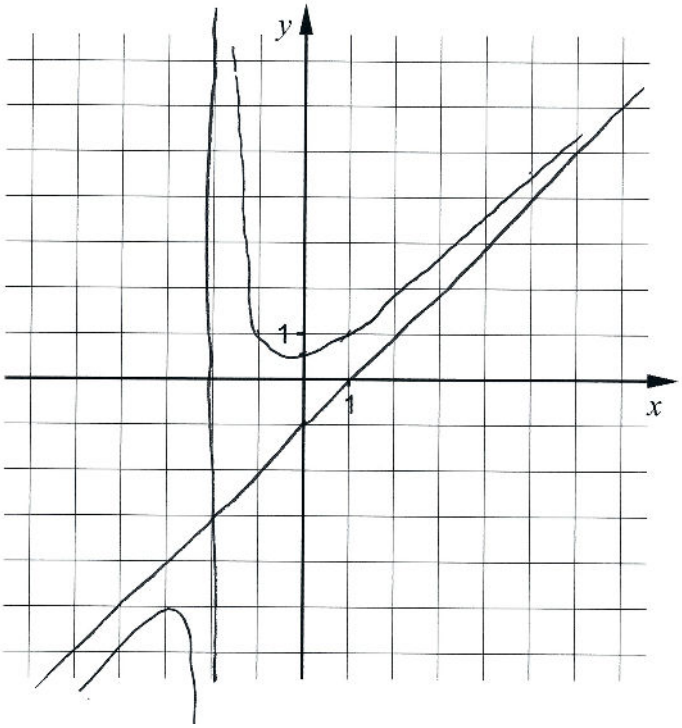
Uppgift 4

Elevlösningsexempel 4.1 (1 EB)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas en godtagbart ritad lodrät asymptot. För den andra asymptoten har en korrekt ekvation angetts men utan skiss och lösningen uppfyller därmed inte kraven för begreppspoäng på C-nivå.

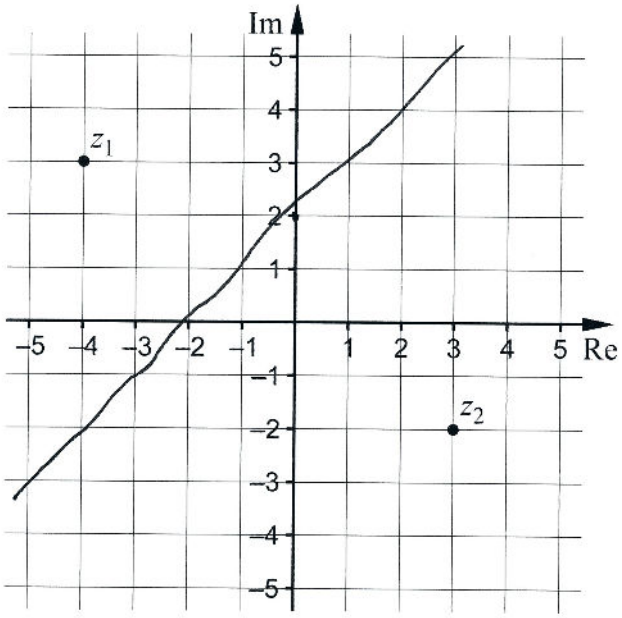
Elevlösningsexempel 4.2 (1 E_B och 1 C_B)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas två godtagbart inritade asymptoter. Trots att lösningen även innehåller en skiss av kurvan ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 7c

Elevlösningsexempel 7c.1 (1 AB)



Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen är linjen $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ inritad. Trots att linjen är något oprecist inritad anses kraven för en begreppspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 13

Elevlösningsexempel 13.1 (0 poäng)

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z$$

$$V.L. = \frac{(2+2i)-(2-2i)}{2i} =$$

$$= \frac{2+2i-2+2i}{2i} =$$

$$= \frac{4i}{2i} = 2 = H.L. \qquad V.S.V.$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att sambandet gäller för ett specifikt fall, $z = 2 + 2\mathrm{i}$. Detta anses inte motsvara en godtagbar ansats.

Elevlösningsexempel 13.2 (1 ER)

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a+bi) - (a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = bi = \operatorname{Im} z$$

VSB.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen påbörjas beviset korrekt vilket uppfyller kraven för ansatspoängen. I den fortsatta lösningen sätts sista kvoten lika med bi i stället för det korrekta b. Vidare anges felaktigt att $bi = \operatorname{Im} z$. Därmed anses likheten inte visad. Lösningen ges en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.3 (2 ER)

$z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{2yi}{2i} = y \qquad \text{V.S.B.}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas att uttrycket är lika med y men utan kommentar om att $y = \operatorname{Im} z$. Trots denna brist anses kraven för den andra poängen nätt och jämnt vara uppfylld. Lösningen ges två resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 13.4 (2 ER)

Den reella delen av z tar ut varandra när de subtraheras eftersom den är samma på båda. Och eftersom $\bar{z}$ är tvärtom z på den imaginära delen så får man Im z när man delar med 2i, t.ex. $\frac{4i - (-4i)}{2i} = 4$

Så om vi har $z = 3 + 4i$ så blir det

$$\frac{3 + 4i - (3 - 4i)}{2i} = 4$$

och Im z är då i detta fall 4.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs ett något otydligt generellt resonemang med den något oprecisa formuleringen ”eftersom $\bar{z}$ är tvärtom z på den imaginära delen”. Sedan följer två exempel för att förtydliga resonemanget. Sammantaget anses detta nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen. Lösningen ges två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 14

Elevlösningsexempel 14.1 (2 CP)

a) $z^2 - 1 = 0 \qquad z = 1$

$f(1) = 1^4 + 2\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 - 2\cdot 1 - 10 =$

$= 1 + 2 + 9 - 2 - 10 = 0$

b)

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 + 2z + 10 & \\
\hline
z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 2z - 10 & z^2 - 1 \\
-(z^4 - z^2) & \\
\hline
2z^3 + 10z^2 - 2z - 10 & \\
-(2z^3 - 2z) & \\
\hline
10z^2 - 10 & \\
-(10z^2 - 10) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$(z^2 + 2z + 10)(z^2 - 1) = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1 - 10}$

$z = -1 \pm 3i$

Svar $z_1 = -1 + 3i$

$z_2 = -1 - 3i$

$z_3 = 1$

$z_4 = -1$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen till deluppgift a) visas endast att den positiva roten till $z^2 - 1 = 0$ är ett nollställe till f. Det är inte tillräckligt för att visa att $z^2 - 1$ är en faktor. I elevlösningen till deluppgift b) genomförs en polynomdivision som ger resten noll. Sedan bestäms samtliga rötter korrekt. Trots att polynomdivisionen i deluppgift b) implicit visar att f är delbar med $z^2 - 1$ ges inte poäng för lösningen i a). Sammantaget ges lösningen två procedurpoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 14.2 (1 C_R och 2 C_P)

a)

$$
\begin{array}{rl}
 & z^2 + 2z + 10 \\
\hline
 & z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 2z - 10 \quad \Big| \; z^2 - 1 \\
- & (z^4 \qquad\quad - z^2) \\
\hline
 & 2z^3 + 10z^2 - 2z - 10 \\
- & (2z^3 \qquad\quad - 2z) \\
\hline
 & 10z^2 \qquad - 10 \\
- & (10z^2 \qquad - 10) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

b)

$$(z^2-1)(z^2+2z+10) = 0$$

$$z^2 - 1 = 0 \rightarrow z = \pm 1$$

$$z^2 + 2z + 10 = 0 \rightarrow z = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$$

<u>Svar</u>

$z_1 = -1 + 3i$
$z_2 = -1 - 3i$
$z_3 = 1$
$z_4 = -1$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen till deluppgift a) genomförs en korrekt polynomdivision som ger resten noll. Trots avsaknad av kommentar om delbarheten anses kraven för resonemangspoängen vara uppfyllda. I elevlösningen till deluppgift b) används resultatet i deluppgift a) och en godtagbar bestämning av samtliga rötter görs. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng på uppgiften.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 CPL)

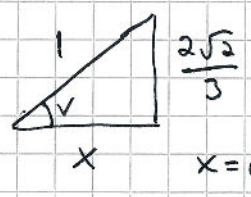
$\tan v = ?$ $\qquad 90^\circ < v < 180^\circ$

$\sin^2 v = \frac{8}{9}$

$\sin v = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$

$\tan v = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$



$x = \cos v$

$\underline{\underline{\text{Svar}}}$ $\tan v = -2\sqrt{2}$

$1^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + x^2$

$1 = \frac{8}{9} + \cos^2 v$

$\frac{1}{9} = \cos^2 v \Rightarrow \cos v = \frac{1}{3}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms med hjälp av en rätvinklig triangel att $\tan v = 2\sqrt{2}$, vilket uppfyller villkoret $\sin^2 v = \frac{8}{9}$ men inte intervallvillkoret. I svaret görs sedan ett teckenbyte på $\tan v$ utan motivering. Därmed anses inte kraven för resonemangspoäng på C-nivå vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 16.2 (2 C_{PL} och 1 C_R)

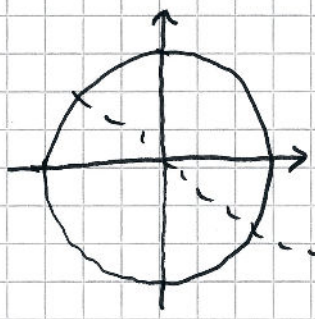
$$\begin{cases} \sin^2 v = \frac{8}{9} \\ \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\tan^2 v = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{1} = 8$$

$$\tan v = \sqrt{\tan^2 v} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

För $90° < v < 180°$



För en vinkel i andra kvadranten behöver talet vara negativt dvs:

$\therefore \tan v = -2\sqrt{2}$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms ett korrekt värde på $\tan v$ som uppfyller båda villkoren. När $\tan v$ bestäms ur $\tan^2 v$ bortses från det negativa värdet. I och med den efterföljande kommentaren om att $\tan v$ är negativt i andra kvadranten anses ändå kraven för resonemangspoängen nätt och jämnt vara uppfyllda. Sammantaget ges samtliga möjliga poäng.

Uppgift 17

Elevlösningsexempel 17.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$ $\qquad$ $f(1) = \frac{a+b}{2}$

$f'(x) = \frac{a(x+1) - 1(ax+b)}{(x+1)^2}$

$f'(1) = \frac{a \cdot 2 - (a+b)}{2^2} = \frac{2a-a-b}{4} = \frac{a-b}{4}$

$\frac{a+b}{2} = 4 \rightarrow a+b = 8 \rightarrow a = 8-b$

$\frac{a-b}{4} = 3 \rightarrow a-b = 12 \rightarrow a = 12+b$

$8-b = 12+b$

$-4 = 2b$

$b = -2$ $\qquad$ $a = 8-(-2) = 8+2 = 10$

Svar $\begin{cases} a = 10 \\ b = -2 \end{cases}$

Bedömningskommentar: I elevlösningen bestäms korrekta värden på a och b. När det gäller kommunikation är den matematiska symbolhanteringen korrekt men villkoren i uppgiften används på rad 4 och 5 utan hänvisning till framtagna uttryck för $f(1)$ och $f'(1)$. Likaså sätts en ekvation upp för bestämning av b på rad 6 utan hänvisning till sambanden på rad 4 och 5. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (1 AR)

$\sin v \cos 40^\circ = \sin v + \cos v \sin 40^\circ$

$\underbrace{\sin v \cos 40^\circ - \cos v \sin 40^\circ}_{\sin(v-40^\circ)} = \sin v$

$\sin(v-40^\circ) = \sin v$

Eftersom att $\sin v$ har sitt högsta värde då $v = 90^\circ$ då $v \geq 90^\circ$ speglar där $v \leq 90^\circ$. Med tanke på detta skulle det krävas att vi hade ett v-värde på 110° för att påståendet ska stämma och eftersom $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$ så saknar ekvationen lösning inom intervallet $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$.

V. S. V.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen hänvisas till att $\sin v$ har största värdet då $v = 90^\circ$ och en något otydlig beskrivning av symmetrin: ”då $v \geq 90^\circ$ speglar där $v \leq 90^\circ$”. Sedan påstås utan motivering att det krävs att $v = 110^\circ$ för att påståendet ska stämma, vilket inte visar att lösningar saknas i intervallet. Därmed anses inte kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå vara uppfyllda.

Elevlösningsexempel 18.2 (2 AR)

$\sin v \cos 40^\circ = \sin v + \cos v \sin 40^\circ$

$\sin v \cos 40^\circ - \cos v \sin 40^\circ = \sin v$

$\sin v \cos 40^\circ - \cos v \sin 40^\circ = \sin(v - 40^\circ)$

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$

$\Rightarrow$ sin har två lika värden,

ett i första och ett i andra kvadranten.

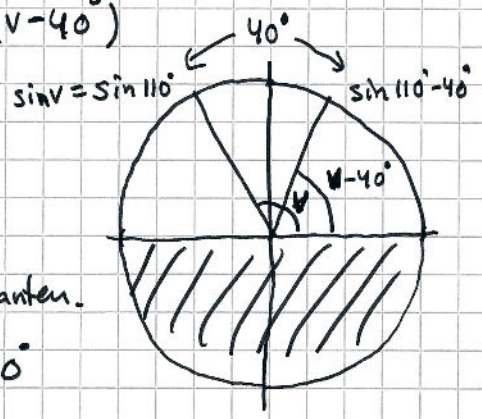
$\Rightarrow \sin v = \sin(v - 40^\circ)$ om $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$

eftersom det krävs $v \geq 110^\circ$ för att

$\sin v = \sin(v - 40^\circ)$

$\sin 110^\circ = \sin(110^\circ - 40^\circ)$

Q.E.D.



$\frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$

20° åt vardera håll

från 90° ger samma

sin.

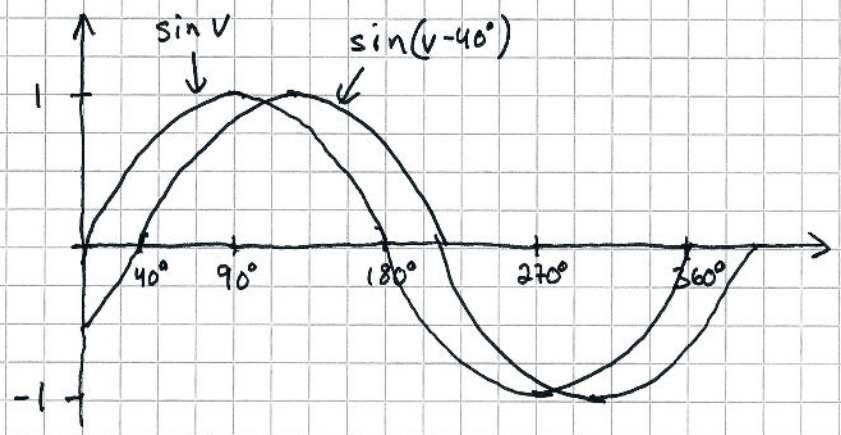
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen hänvisas till formeln $\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\theta)$ och tolkningen att ”sin har två lika värden, ett i första och ett i andra kvadranten”. Med hjälp av enhetscirkeln markeras vinklarna v och $v - 40^\circ$ i varsin kvadrant och en beräkning görs att $v = 110^\circ$. Resonemanget som helhet anses utesluta lösningar till ekvationen i intervallet. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Elevlösningsexempel 18.3 (2 AR)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$ saknar lösning i $0 \leq v \leq 90°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$

$\sin(v - 40°) = \sin v$



Linjerna stöter inte på varandra föräns efter 90°

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen skissas graferna till $y = \sin v$ och $y = \sin(v - 40°)$. Därefter konstateras att ”Linjerna stöter inte på varandra föräns efter $90°$”. Detta anses tillräckligt för att visa att lösningar till ekvationen saknas i intervallet. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Elevlösningsexempel 18.4 (2 AR)

$\sin v \cos 40^\circ = \sin v + \cos v \sin 40^\circ$

$\sin v \cos 40^\circ - \cos v \sin 40^\circ = \sin v$ $\quad (\sin(u+v))$

$\sin(v - 40^\circ) = \sin v$ $\quad (\arcsin)$

$v - 40^\circ = v + n \cdot 360^\circ$

$v - 40^\circ = 180^\circ - v + n \cdot 360^\circ$

$2v = 220^\circ + n \cdot 360^\circ$

$v = 110^\circ + n \cdot 180^\circ$

v får då aldrig värdet $0^\circ \leq v \leq 90^\circ$ V.S.B.

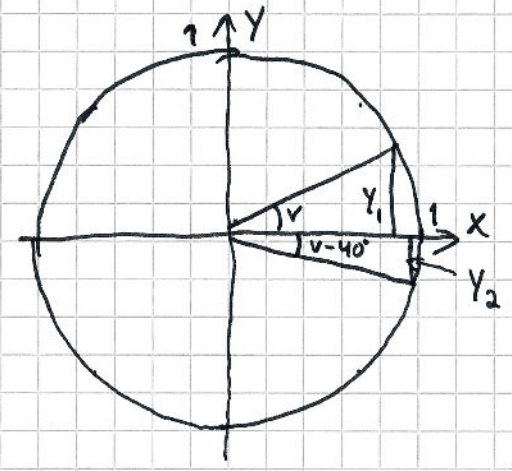
Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen genomförs en förenkling med subtraktionssatsen för sinus följt av en algebraisk lösning av ekvationen. Där lämnas ekvationen $v - 40^\circ = v + n \cdot 360^\circ$ utan kommentar om att den saknar lösning. Trots detta anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 18.5 (2 AR)

$\sin v \cos 40° = \sin v + \cos v \sin 40°$

$\sin v \cos 40° - \cos v \sin 40° = \sin v$

$\sin(v - 40°) = \sin v$



$Y_1 = \sin v \quad Y_2 = \sin(v - 40°)$

$0° \leq v \leq 90°$

Vad än v är i intervallet så blir alltid $Y_1 > Y_2$ då Y_2 även kan vara negativt. samt att det är 40° mindre

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas enhetscirkeln med vinklarna v och $v - 40°$ inritade, där v är vald så att $0° \leq v \leq 90°$. Sedan namnges y-koordinaterna på enhetscirkeln: $y_1 = \sin v$ och $y_2 = \sin(v - 40°)$. Slutligen resoneras utifrån figuren att $y_1 > y_2$ oavsett vilket värde v har i intervallet. Detta anses visa att $\sin v = \sin(v - 40°)$ saknar lösning för v i intervallet $0° \leq v \leq 90°$. Lösningen anses uppfylla kraven för båda resonemangspoängen på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösningsexempel 20.1 (0 poäng)

Zaras kurva har kortare period än Yosefs.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen beskrivs skillnaden mellan kurvorna. Det saknas dock en förklaring till varför Yosefs och Zaras kurvor ser olika ut för samma inmatade funktion.

Elevlösningsexempel 20.2 (0 poäng)

De har råkat använda olika inställningar.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen framgår inte vilken typ av inställningar det gäller.

Elevlösningsexempel 20.3 (1 EB)

En har ställt räknaren på radianer.

Bedömningskommentar till exemplet: Även om det inte uttrycks vem som ritar kurvan i radianer framgår det att graferna ritats med olika vinkelmått.

Elevlösningsexempel 20.4 (1 EB)

De har haft olika vinkelinställningar

Bedömningskommentar till exemplet: Även om det inte nämns något om grader och radianer framgår det att graferna ritats med olika vinkelmått.

Uppgift 21

Elevlösningsexempel 21.1 (2 EPL)

$x = 1{,}9$ $\quad y = 3x^2$ (under) $\quad y = 4x^3 + k$ (över) $\quad$ 13 a.e.

$$\int_0^{1{,}9} 4x^3 + k - 3x^2$$

1. Skrev in alla tre funktionerna i geogebra
2. Skrev in integral mellan $4x^3+k$ och $3x^2$ och sedan prövade jag med glidare och fick 13 a.e. när $k = 3{,}6$.

Svar: $k = 3{,}6$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en integral för beräkning av arean även om dx saknas. Sedan genomförs en prövning i GeoGebra där ett godtagbart värde på k bestäms. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på E-nivå.

Elevlösningsexempel 21.2 (2 EPL)

$$\int_0^{1,9} (4x^3 + k - 3x^2)\,dx = 13$$

Löser med CAS

$k = 3,6$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen anges en ekvation för lösning av problemet. Ekvationen löses med CAS och ett godtagbart värde på k erhålls. Trots att ingen beskrivning görs om hur CAS använts anses lösningen uppfylla kraven för två problemlösningspoäng på E-nivå.

Uppgift 25

Elevlösningsexempel 25.1 (0 poäng på deluppgift c)

$$\int_0^{15,492} 0,42\,v^3\,dt = 6051,2 \text{ MJ}$$

Maxeffekt $0,42 \cdot 36^2 = 19595,52$

Totalt $= 6051,2 + 19595,52 \cdot (24 - 15,492) =$

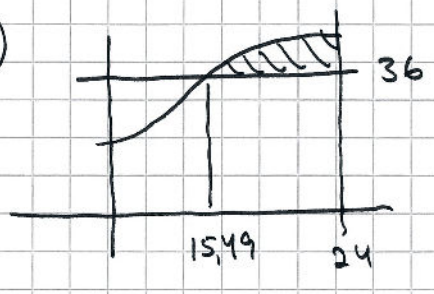
$= 172769,88$ MJ

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen av deluppgift c) delas produktionen av elenergi upp i två beräkningar, en integralberäkning och en areaberäkning vid maximaleffekt. Båda dessa beräkningar utgår från $0,42v^3$ utan att ersätta v med uttrycket för sinusfunktionen. Detta gör att kraven för ansatspoängen i deluppgift c) inte anses uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.2 (1 EM, 1 CM och 2 AM)

a) 39 km/h

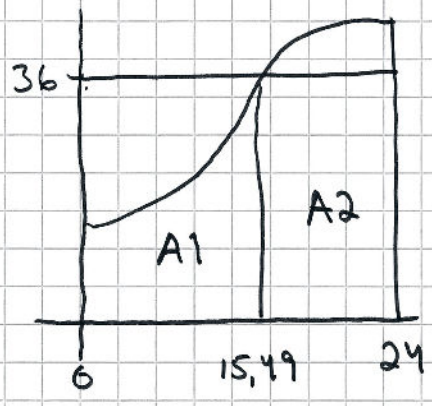
b)



behöver veta när f(x) = 36
resten av dygnet så är
vindhastigheten över.

i 24 − 15,49 timmar alltså 8,5 timmar.

c)



$A2 = 0{,}42 \cdot 36^3 \cdot 8{,}5 =$
$= 167 \cdot 10^3$ MJ

$A1 = 150{,}9 \cdot 10^3$ MJ

bytade ut v i P(v)
till v(x)

$P(v) = 0{,}42 \cdot (f(x))^3$

integralen för denna funktion
mellan x = 0 och x = 15,49
gav mig A1

Svar = $A_1 + A_2 =$
$150{,}9 \cdot 10^3 + 167 \cdot 10^3 =$
$318 \cdot 10^3$ MJ

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen behandlas uppgiften i sin helhet med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas i deluppgift b) och c) gradering och namngivning av axlarna och dessutom används beteckningen $f(x)$ i stället för $v(x)$. I deluppgift c) är y-värdet 36 felaktigt i figuren då y-axeln här torde representera effekten och inte vindhastigheten. Dessa brister gör att kraven på tydlighet och korrekthet i användandet av matematiska symboler för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda.

Elevlösningsexempel 25.3 (1 EM, 1 CM, 2 AM och 1 AK)

a) 39 km/h

b) $v = 36 \Rightarrow x = 15{,}494$

$v > 36$ fortsätter natten ut

$t = t_{slut} - t_{start} = 24 - 15{,}494 = 8{,}506$

Svar: Under 8,5 timmar

c) $P(v) = 0{,}42\, v^3$

$v(x) = 11 \sin(0{,}11x - 0{,}89) + 28$

$$\text{Tot energi} = \int_0^{24} \left(\begin{cases} P(v); & x < 15{,}494 \\ P(36); & x > 15{,}494 \end{cases} \right) dx =$$

$$= \int_0^{15{,}494} P(v)\, dx + \int_{15{,}494}^{24} P(36)\, dx \approx 317640 \text{ MJ}$$

avläses i geogebra

Svar: Vindkraftverken producerar totalt 318 GJ.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen behandlas uppgiften i sin helhet med korrekt svar. När det gäller kommunikation saknas i deluppgift b) information om hur $x = 15{,}494$ bestämts. Trots detta anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 27b

Elevlösningsexempel 27b.1 (1 AR)

$a < b$

$$C = 0 = \int_a^b (7x - x^2 - 10)\,dx$$

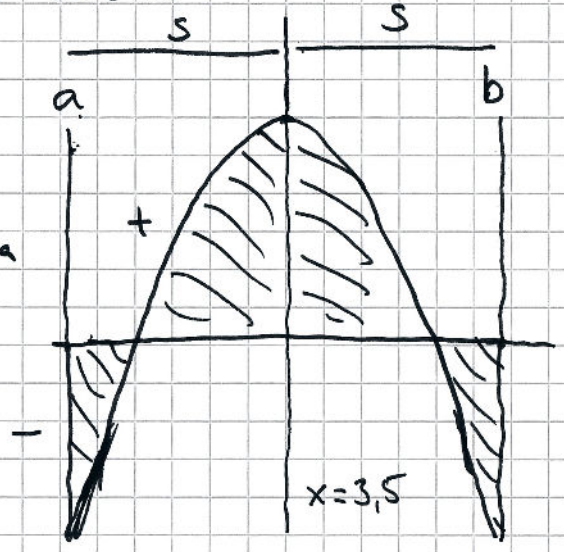
a ska vara så litet som möjligt och b ska vara så stort som möjligt.

b − a Skillnaden ska vara så stor som möjligt.

Symmetrilinjen är i $x = 3{,}5$ given av derivering i geogebra

För att få största skillnaden ska a och b vara lika nära $x = 3{,}5$.

$3{,}5 - a$



a.e. = 0

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen påpekas att a ska vara så litet som möjligt och att b ska vara så stort som möjligt och att de ska vara lika nära symmetrilinjens x-koordinat. Tillsammans med en illustrativ figur anses detta resonemang om hur intervallet ska väljas tillräckligt för att uppfylla kraven för resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27b.2 (1 AR och 1 APL)

$$\int_2^5 (7x - x^2 - 10)\,dx = 4{,}5 \qquad \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$$

Löser $\int_x^2 (7x - x^2 - 10)\,dx = -2{,}25$ med CAS

$\Longrightarrow$ $x = 0{,}9$ $\qquad 2 - 0{,}9 = 1{,}1$

och två lösningar som inte passar $\qquad 5 + 1{,}1 = 6{,}1$

$$\int_{0{,}9}^{6{,}1} (7x - x^2 - 10)\,dx = 0 \qquad b - a = 6{,}1 - 0{,}9 = \underline{\underline{5{,}2}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen bestäms först integralens värde med nollställena som integrationsgränser. Därefter bestäms den undre integrationsgränsen, det vill säga värdet på konstanten a, med hjälp av CAS men utan att samtliga lösningar till ekvationen redovisas ($x = 3{,}5$ och $x = 6{,}09...$). Trots detta anses ekvationslösningen vara godtagbar i och med kommentaren ”och två lösningar som inte passar”. Vidare bestäms det största värdet för $(b - a)$ genom att först bestämma den andra integrationsgränsen. Även om det i elevlösningen inte motiveras varför detta är det största värdet anses lösningen i det här fallet nätt och jämnt uppfylla kraven för en resonemangspoäng på A-nivå och en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 27b.3 (1 AR och 1 APL)

Integral($7x - x^2 - 10$, a, b) i CAS ger

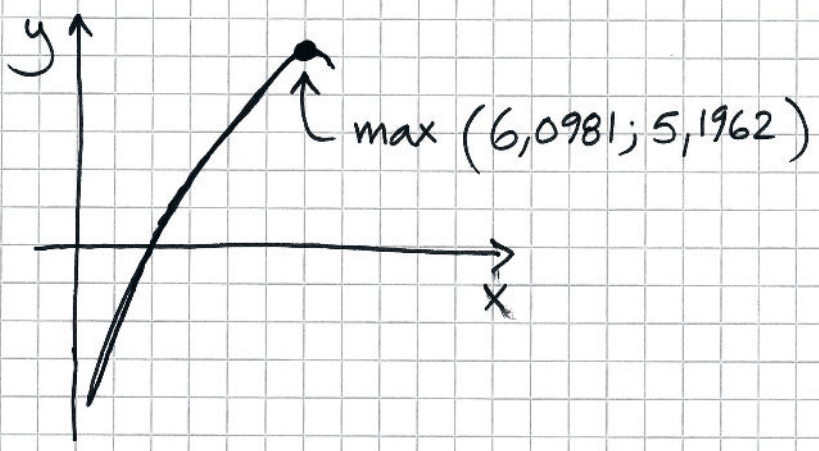
$$\frac{2a^3 - 21a^2 - 60a - 2b^3 + 21b^2 - 60b}{6}$$

Lös(= 0) i CAS ger

$a = b$

$$a = \frac{-2b \pm \sqrt{-4b^2 + 28b - 13} \cdot \sqrt{3} + 21}{4}$$

Ersätter b med x och ritar $y = b - a$ för att hitta max



Med det andra a:et fick jag ett min (0,9019; −5,1962)

Svar: Det största värdet på (b−a) är 5,1962.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen används CAS för att först bestämma ett uttryck för $\int_a^b (7x - x^2 - 10)\,\mathrm{d}x$ som används för att lösa ekvationen $\int_a^b (7x - x^2 - 10)\,\mathrm{d}x = 0$. Lösningen till ekvationen ger tre möjliga samband mellan konstanterna a och b som används för att grafiskt bestämma det maximala värdet för $(b - a)$. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.